Cours 6.2 – Endomorphismes qui commutent

Motivation : décomposition de Dunford :

V k. esp. vect. dim. finie

$u \in \mathrm{End}_k(V)$ dont le pol. car. est scindé sur k

Alors $u = d + n$

$d, n \in \mathrm{End}_k(V)$:

d diagonalisable

n nilpotent

$\boxed{dn = nd}$

<u>Proposition</u> : Soient $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$

t.q. $\underline{\underline{uv = vu}}$

[on dit que u et v <u>commutent</u>]

Ici $u \circ v = v \circ u$.

Alors $\forall p \geq 1$,

$$\boxed{(u+v)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p-i} v^i}$$

(binôme de Newton) $\square$

<u>Rappel</u> : $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!\,.\,(p-i)!}$

<u>Preuve</u> : par récurrence sur $p \geq 1$.

• $\underline{p=1}$: $u+v = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{u^{1-0} v^{0}}_{u}$

$+ \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} \underbrace{u^{0} v^{1-0}}_{v}$ ✓

• $p \longrightarrow p+1$.

$$(u+v)^{p+1} = (u+v)^{p} \cdot (u+v)$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p-i} v^{i}\right] (u+v)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p-i} v^{i} u + \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p-i} v^{i+1}$$

$uv = vu$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p+1-i} v^{i} + \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p-i} v^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p+1-i} v^{i} + \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p+1-(i+1)} \cdot v^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^{p+1-i} v^{i} + \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1} u^{p+1-i} v^{i}$$

$$= u^{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left[\binom{p}{i} + \binom{p}{i-1}\right]}_{\binom{p+1}{i}} u^{p+1-i} v^{i} + v^{p+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} u^{p+1-i} \cdot v^{i} \qquad \square$$

Application de cette formule à la décomp. de Dunford

Soit $A \in M_n(k)$, $A = D + N$

D diagonalisable

N nilpotente : $N^n = 0$.

Alors $\forall p \geq n$:

$$A^p = (D+N)^p$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^{p-i} N^i$$

$N^i = 0$ $\forall i \geq n$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p}{i} D^{p-i} N^i.$$

⚠ Cette formule est remarquable lorsque $p \gg n$.

(une somme ayant p termes se réduit à une somme ayant n termes)

<u>Reformulation :</u>

$A \in M_n(k)$ t.q.

$$A = (PDP^{-1}) + (PNP^{-1})$$

avec D diagonale, $DN = ND$

N nilpotente $(N^n = 0)$

P inversible

alors $\forall p \geq 1$:

$$A^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (PDP^{-1})^{p-i} \cdot (PNP^{-1})^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p}{i} P D^{p-i} N^{i} P^{-1}$$

$$= P \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p}{i} D^{p-i} N^{i} \right] P^{-1}$$

Ceci permet en pratique de calculer des puissances de A même lorsque A n'est pas diagonalisable !

<u>Exercice</u> : que devient la formule précédente si A diagonalisable ?

Exercice : étudier le polygone pour voir d'autres propriétés remarquables des endomorphismes qui commutent.

$\boxed{}$