

Cours 6.2 - Endomorphismes

qui commutent

Motivation : décomposition de

Dunford :

V k. esp. vect. algébr. finit
 $n \in \text{End}_k(V)$ dont le pol. car.
est scindé sur k

Alors $n = d + n$

$d, n \in \text{End}_k(V)$:

d diagonalisable

n nilpotent

$$\boxed{dn = nd}$$

Proposition : Soient $u, v \in \text{End}_k(V)$

+ . } .

$$uv = vu$$

[on dit que u et v commutent] $\overbrace{}$

Ici $u \circ v = v \circ u$.

Alors $\forall p \geq 1$,

$$(u+v)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} u^{p-i} v^i$$

(binôme de Newton)

□

Rappel: $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$

Préuve : par récurrence sur $p \geq 1$.

$$\bullet \quad p=1 : u+v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{matrix} u & v \\ u & u \end{matrix}}_{\begin{matrix} " \\ 1 \end{matrix}}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} u & v \\ v & v \end{matrix}}_{\begin{matrix} " \\ 1 \end{matrix}} \checkmark$$

$$\bullet \quad p \rightarrow p+1.$$

$$\begin{aligned} (u+v)^{p+1} &= (u+v)^p \cdot (u+v) \\ &= \left[\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} u^{p-i} v^i \right] (u+v) \\ &= \sum_{i=0}^p \left(\binom{p}{i} u^{p-i} v^i \underbrace{u}_{\substack{\uparrow \\ i}} + \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} u^{p-i} v^{i+1} \right) \end{aligned}$$

$$u^P = \sum_{i=0}^P \binom{P}{i} u^{P+1-i} v^i + \sum_{i=0}^P \binom{P}{i} u^{P-i} v^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^P \binom{P}{i} u^{P+1-i} v^i + \sum_{i=0}^P \binom{P}{i} u^{P+1-(i+1)} v^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^P \binom{P}{i} u^{P+1-i} v^i + \sum_{i=1}^{P+1} \binom{P}{i-1} u^{P+1-i} v^i$$

$$= u^{P+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^P \left[\binom{P}{i} + \binom{P}{i-1} \right] u^{P+1-i} v^i}_{\binom{P+1}{i}} + v^{P+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{P+1} \binom{P+1}{i} u^{P+1-i} v^i \quad \boxed{P+1}$$

Application de cette formule

à la décomp. de Dugford

Soit $A \in M_n(k)$, $A = D + N$

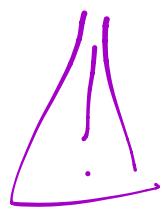
D diagonalisable

N nilpotente : $N^n = 0$.

Alors $\forall p \geq n$:

$$A^p = (D + N)^p$$
$$= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} D^{p-i} N^i$$

$$\begin{aligned} N^i &= 0 & i &= 0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p}{i} D^{p-i} N^i. & i &> n \end{aligned}$$



Cette formule est n'importeable
lorsque $p \gg n$.

(une somme ayant p termes se
réduit à une somme ayant n termes)

Reformulation :

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t. g.}$$

$$A = (PDT^{-1}) + (PNP^{-1})$$

avec D diagonale, $|DA| = ND$
 N nilpotente ($N^n = 0$)

P inversible

alors $\#_P \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 A^P &= \sum_{i=0}^T \binom{P}{i} (P D P^{-1})^{P-i} \cdot (P N P^{-1})^i \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{P}{i} P D^{P-i} N^i P^{-1} \\
 &= P \left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{P}{i} D^{P-i} N^i \right] P^{-1}
 \end{aligned}$$

Ceci permet en pratique de calculer
des puissances de A même
lorsque A n'est pas diagonalisable !

Exercice: que devient la formule
précédente si A diagonalisable ?

Exercice: étudier le polytope
pour voir d'autres propriétés
remarquables des endomorphismes
qui commutent.

