LU2MA123 – Forme normale de Jordan

Application : calcul de puissances de matrices

Rappel : $A \in M_n(k)$ t.q. $P_A(X)$ scindé sur k

$\rightsquigarrow$ A possède une décomp. de Dunford

$$A = \underbrace{D}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{N}_{\text{nilpotente}}, \quad DN = ND, \quad D, N \in M_n(k).$$

En fait (algorithme 2.0) :

$$A = P \cdot (D + N) \cdot P^{-1}$$

avec $P \in GL_n(k)$

D diagonale

N triang. sup. avec 0 sur diagonale.

Mieux que ça : $D+N$ diagonale par blocs de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

La décomp. de Jordan est un raffinement : trouver une forme normale de Jordan revient à écrire
$$A = P \cdot T \cdot P^{-1}, \quad P \in GL_n(k)$$
T diagonale par blocs de Jordan.
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Calcul des puissances de A :

1 $A^{\ell} = P \cdot T^{\ell} \cdot P^{-1}, \forall \ell \geq 1$.

T^{ℓ} diag. par blocs

2 Pour calculer T^{ℓ} il suffit de le faire pour chaque bloc. (les blocs n'interagissent pas)

3 Si $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, pour calculer

$J_n(\lambda)^{\ell}$ on écrit $J_n(\lambda) = \lambda \cdot I_n + U_n$

et donc
$$J_n(\lambda)^{\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} (\lambda \cdot I_n)^{\ell-i} \cdot U_n^{i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \lambda^{\ell-i} \cdot U_n^{i}$$

- si $\ell \leq n-1$: on obtient.

$$J_n(\lambda)^\ell = \begin{pmatrix} \lambda^\ell & \ell\lambda^{\ell-1} & \binom{\ell}{2}\lambda^{\ell-2} & \cdots & \ell\lambda & 1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \lambda^\ell & & & & \end{pmatrix}$$

• si $\ell > n-1$: puisque $U_n^i = 0$, $i \geq n$,

la somme (qui compte a priori $\ell+1$ termes) se réduit à une somme ayant n termes :

$$J_n(\lambda)^\ell = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{\ell}{i} \lambda^{\ell-i} U_n^i$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^\ell & \ell\lambda^{\ell-1} & \cdots & \binom{\ell}{n-1}\lambda^{\ell-n+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ell\lambda^{\ell-1} \\ 0 & & & \lambda^\ell \end{pmatrix}$$

$\boxed{}$

Dans le polycopié : exple explicite.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 25 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$A = P\, J_2(-1)\, P^{-1}$; avec P explicite.

Donc $\forall\, \ell \geq 1$:

$$A^{\ell} = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{\ell} & \ell(-1)^{\ell-1} \\ 0 & (-1)^{\ell} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$\blacksquare$