LU2MA123 – Forme normale de Jordan (3)

Application au calcul du polynôme minimal

Préliminaires sur le polynôme minimal.

Proposition : Soit V k-esp. dim. finie
soit $u \in End_k(V)$.

Il existe un unique polynôme
$$\mu_u \in k[X].$$
ayant les propriétés suivantes :

- $\mu_u(u) = 0$ [μ_u annule u]
- μ_u est unitaire [le coeff. de son terme

dominant est $= 1$]

- si $P \in k[X]$ t.q. $P(u) = 0$, alors μ_u / P.

Ce polynôme s'appelle "le polynôme minimal de u"

Idée de preuve : on considère

$$I_u = \{P \in k[X] : P(u) = 0\} \subseteq k[X].$$

et on remarque que c'est un idéal :

- I_u ss esp. vectoriel $\subseteq k[X]$
- si $P \in I_u$ alors $P_1 \cdot P \in I_u$ pour tout $P_1 \in k[X]$.

L'existence de μ_u avec les propriétés énoncées revient à dire que I_u est un idéal principal : $\exists\, \mu_u \in I_u$ t.q. tout $P \in I_u$ est un multiple de μ_u.

Il se trouve que tout idéal de $k[X]$ est principal. [On dit que l'anneau $k[X]$ est principal.]

Exemple : $u = \lambda \cdot Id_V$.

$$\mu_u(X) = X - \lambda.$$

Conséquence de la proposition :

$$\mu_u \,/\, P_u.$$

minimal   caractéristique.

Exple : $u = \lambda \cdot Id_V$.

$$\mu_u = X - \lambda, \quad P_u = (X-\lambda)^n \cdot (-1)^n.$$

Proposition : Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines dans k, à savoir les valeurs propres de u.

Preuve :

- Si λ valeur propre de u, alors choisissons $x \in V$, $x \neq 0$ vecteur propre : $u(x) = \lambda x$

$$0 = \mu_u(u)x = \mu_u(\lambda) \cdot x.$$

Puisque $x \neq 0$, on déduit $\mu_u(\lambda) = 0$.

- Puisque μ_u / P_u et les racines de P_u sont exactement les valeurs propres, on déduit que μ_u n'a pas d'autres racines ds k.

$\boxed{M}$

Question : comment calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme ?

Nous savons : • $\mu_u \mid P_u$.

• les racines de μ_u sur k sont les val. propres

En général, μ_u est de degré plus petit que le polynôme caractéristique !

[<u>exple</u> : si $u = \lambda \mathrm{Id}_V$, $\mu_u = X - \lambda$

$P_u = (-1)^n (X-\lambda)^n$]

<u>Application de la forme normale de Jordan au calcul du polynôme minimal</u>

<u>Proposition</u> (Corollaire 2.4.6 poly).

V k-esp. vect. dim. finie

$u \in \mathrm{End}_k(V)$ t.q. $P_u(X)$ scindé sur k.

[en particulier u possède une FNJ]

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes,

de sorte que $P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$

avec $m_1 + \dots + m_r = \dim V$.

Alors le polynôme minimal de u est

$$\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{d_i}$$

où d_i est la taille du plus grand bloc de Jordan de u avec valeur propre λ_i.

$\blacksquare$

<u>Preuve</u> : • puisque $\mu_u \mid P_u$, il est bien de la forme $\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{d_i}$, avec

des exposants d_i à déterminer.

• μ_u est aussi le pol. minimal de la matrice représentée par la FNJ.

et l'on voit qu'un pol. de la forme $\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{d_i}$ est annulateur si chaque $d_i \geq$ taille max d'un bloc de Jordan de val. propre λ_i

En effet : $(J_\ell(\lambda) - \lambda I_\ell)^\ell = 0$.

• on vérifie aussi que, si $d_i <$ taille max d'un bloc de Jordan de val. propre λ_i, alors $\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{d_i}$ n'annule pas la forme normale de Jordan.

En effet : $(J_\ell(\lambda) - \lambda I_\ell)^j \neq 0$.
$j<\ell$

$\boxed{}$

Exemples :

- $u = \lambda \mathrm{Id}_V$. FNJ : $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

$$\mu_u(X) = (X-\lambda)^1$$

- $\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{array}\right)$ $\mu_u(X) = (X-\lambda)^2$.

Ici $(X-\lambda)\left[\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{array}\right)\right]$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{array}\right) - \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 0 & 1 \\ & & 0 \end{array}\right) \neq 0.$$

Mais $(X-\lambda)^2\left[\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array}\right)^2 = \underline{\underline{0}}.$

Par contraste : $P_{\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & & \\ \hline & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{array}\right)}(X) = -(X-\lambda)^3$.

$\blacksquare$

<u>Exple</u> : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$: $\mu_u = (X-\lambda)^3$.

$P_u(X) = -(X-\lambda)^3$.

$\blacksquare$