TD 3 – Exercice 2

Rappel : thème du TD 3 :
trigonalisabilité.

Ex 2 : Calculer A^n, $n \geq 1$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$$

Idée : il est facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale D :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}, n \geq 1$$

Ainsi : si A est diagonalisable, i.e.

$D = P^{-1}AP$, D diagonale
P inversible,

ou encore $A = PDP^{-1}$ $\triangle$!

alors $A^n = \underbrace{(PDP^{-1})\cdot(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n \text{ fois}}$

$$= \underline{\underline{PD^nP^{-1}}}$$

<u>Diagonalisabilité</u> : étude des espaces propres.

Calcul des valeurs propres : racines de $P_A(X) = \begin{vmatrix} -5-X & 3 \\ -14 & 8-X \end{vmatrix}$

$$= (-5-X)(8-X) + 42$$

$$= -40 + 5X - 8X + X^2 + 42$$

$$= X^2 - 3X + 2$$

$$= (X-1)(X-2).$$

Deux val. propres distinctes :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Matrice diagonalisable puisque les valeurs propres sont simples.

<u>Calcul des espaces propres</u> :

$$\ker(A - I_2) = \ker\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -14 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - 2I_2) = \ker\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -14 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$,

la matrice $D = P^{-1}AP$ diagonale

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Vérification</u> : $PD = AP$

$\quad\quad\quad\quad\;\; \| \quad\quad\;\; \|$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Ainsi

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot 2^n \\ 2 & 7\cdot 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7-6\cdot 2^n & -3+3\cdot 2^n \\ 14-14\cdot 2^n & -6+7\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

<u>$n=1$</u> : $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix} = A.$ $\checkmark$

<u>Rmq</u> : Si une matrice A n'est pas diagona-

lisable, pour calculer ses puissances A^n on utilise la décomposition de Dunford.