

TD 3 : Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$
la matrice $A + \lambda \cdot I_n \in GL_n(\mathbb{R})$?

2) m. s. il existe une suite de
matrices $A_k \in \underline{GL_n(\mathbb{R})}$ t. s.

$$A_k \longrightarrow A, \quad k \longrightarrow \infty$$

ou sans suivant : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,
la suite des coefficients (i, j) de A_k
converge vers le coeff. (i, j) de A :

$$A_k(i, j) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A(i, j).$$

Montrez de formuler la conclusion :

$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.



Solution: 1) $A + \lambda \cdot I_n$ inversible

$$\text{ssi } \ker(A + \lambda I_n) = \{0\}$$

ssi $-\lambda$ n'est pas une valeur propre de A

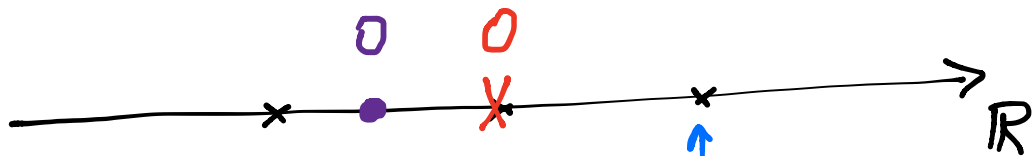
ssi $-\lambda$ n'est pas racine du pol.
car. $P_A(X)$



2) Il suffit de remarquer le fait que $\exists \lambda_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$
t. q. $A + \lambda_k \cdot I_n$ inversible. On pose alors

$$A_k = A + \lambda_k I_n.$$

Existence de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$:



Si $0 \notin \{\text{racines de } P_A(X)\}$,

on peut prendre $\lambda_k = 0$.

(il y en a un nombre fini, au plus n)

Si $0 \in \{\text{racines de } P_A(X)\}$, alors on choisit une suite $\lambda_k \rightarrow 0, \lambda_k \neq 0$, avec $\lambda_k \in \text{voisi. assez petit de } 0$. De cette manière on s'assure

que $-\lambda_k \notin \{\text{racines de } P_A(x)\}$ et donc

$$A_k = A + \lambda_k I_n \text{ inversible.}$$

Ce qui est sous-jacent à cet argument est l'énoncé suivant :

$\mathbb{R} \setminus \{\text{ensemble fini}\}$ est dense dans \mathbb{R} .



La suite de matrices inversibles

$$A_k = A + \lambda_k I_n, \text{ avec } \begin{matrix} \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \lambda_k \neq 0 \end{matrix}$$

convergent :

$$\underline{i \neq j}: A_k(i, j) = A(i, j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A(i, j)$$

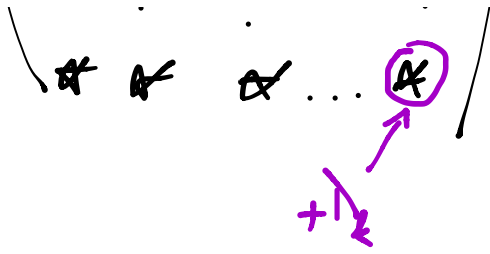
$$\underline{i = j}: A_k(i, i) = A(i, i) + \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A(i, i)$$

□

Image :

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$





IM