

## Complément au cours No. 7

Lemme :  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  à support cpt,  $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$

$$\Rightarrow \exists u_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ à supp. cpt t.g. } f = \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Preuve: Récc. sur  $n$ .

$n=1$ :  $u_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

$n-1 \Rightarrow n$  : Écrivons  $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$

Posons  $g(x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$

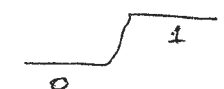
Alors supp  $g$  cpt et  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g = 0 \Rightarrow \exists v_i(x_2, \dots, x_n), i=2, \dots, n$   
 $g = \sum_{i=2}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

Soit  $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt$

Alors  $f = \frac{\partial w}{\partial x_1}$  mais  $w$  n'est pas à supp. cpt : pour  $x_1$  grand,  
 $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n)$ .

On corrige  $w$  de façon à ce qu'elle soit à support cpt :

$$u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) := w(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1) g(x_2, \dots, x_n)$$

avec  $f$  fct paire 

$$\begin{aligned} \text{Alors } f &= \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \underbrace{f'(x_1) g(x_2, \dots, x_n)}_{\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x_2, \dots, x_n)} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ avec } u_i = f'(x_1) v_i(x_2, \dots, x_n) \\ &\quad \text{supp cpt. } \square \end{aligned}$$