Complément au cours No. 7

Lemme : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à support cpct, $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$

$\Rightarrow \exists\, u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à supp. cpct t.q. $f = \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

Preuve : Récc. sur n.

$\underline{n=1}$: $u_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$\underline{n-1 \Rightarrow n}$: Écrivons $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$

Posons $g(x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1$

Alors supp g cpct et $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g = 0 \Rightarrow \exists\, v_i(x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{2, n}$

$$g = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Soit $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n)\, dt$

Alors $f = \frac{\partial w}{\partial x_1}$ mais w n'est pas à supp. cpct : pour x_1 grand,

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n).$$

On corrige w de façon à ce qu'elle soit à support cpct :

$$u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) := w(x_1, x_2, \dots, x_n) - \rho(x_1)\, g(x_2, \dots, x_n)$$

avec ρ fct palier 

Alors $f = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho'(x_1)\, \underbrace{g(x_2, \dots, x_n)}_{\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x_2, \dots, x_n)}$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ avec } u_i = \rho'(x_1)\, v_i(x_2, \dots, x_n)$$

supp cpct. $\boxed{///}$