COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014
FEUILLE D'EXERCICES NO. 1 : VARIÉTÉS, CHAMPS DE VECTEURS

ALEXANDRU OANCEA

Exercice 1. (exemples de variétés)

(i) Soit $f : M \to N$ une application lisse entre variétés et $y \in N$ une valeur régulière. Montrer que, pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'on a un isomorphisme canonique $T_x f^{-1}(y) \simeq \ker df(x)$.

(ii) La sphère $S^n := \{(x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$ est une variété. L'espace tangent en x s'identifie à $x^\perp := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y, x\rangle = 0\}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iii) On note $G_\mathbb{R}(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels réels de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ (*grassmannienne des k-plans dans* $\mathbb{R}^n$). Montrer que $G_\mathbb{R}(k, n)$ a une structure naturelle de variété pour laquelle on a un isomorphisme canonique $T_V G_\mathbb{R}(k, n) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, V^\perp)$. Cas particulier : $k = 1$, auquel cas on appelle $G_\mathbb{R}(1, n)$ *l'espace projectif réel de dimension* $n - 1$ et on le note $\mathbb{R}P^{n-1}$, ou encore $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) On note $G_\mathbb{C}(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension k dans $\mathbb{C}^n$ (*grassmannienne des k-plans complexes dans* $\mathbb{C}^n$). Montrer que $G_\mathbb{C}(k, n)$ a une structure naturelle de variété pour laquelle on a un isomorphisme canonique $T_V G_\mathbb{C}(k, n) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, V^\perp)$. Ici $V^\perp$ est l'orthogonal de V par rapport au produit hermitien sur $\mathbb{C}^n$. Cas particulier : $k = 1$, auquel cas on appelle $G_\mathbb{C}(1, n)$ *l'espace projectif complexe de dimension* $n-1$ et on le note $\mathbb{C}P^{n-1}$, ou encore $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

(v) Les groupes $SO(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $SL(n)$ sont des variétés lisses. Calculer leur dimension et leur espace tangent en Id. (Ce sont des cas particuliers de *groupes de Lie*.)

Exercice 2. (à propos du premier théorème fondamental de la théorie de Morse) Justifier que les ensembles $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1000\}$ sont difféomorphes, y compris du point de vue du théorème cité.

Date: 10 Septembre 2013.

Exercice 3. (champs de vecteurs) Soit M une variété et $Diff(M)$ son groupe de difféomorphismes. Etant donné $\varphi \in Diff(M)$ on définit le *support de* φ comme étant l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\varphi) := \overline{\{x \in M \,:\, \varphi(x) \neq x\}}.$$

Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs. Le *support de* X est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(X) := \overline{\{x \,:\, X(x) \neq 0\}}.$$

On note $Diff_c(M)$ le groupe des difféomorphismes de M à support compact.

(i) Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $\mathrm{Supp}(X)$ est compact, alors le flot φ_X^t est défini pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_X^t) \subseteq \mathrm{Supp}(X)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte pour un certain $t_0 \neq 0$.

(ii) Soit $B^n(\varepsilon)$ la boule de rayon $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $Diff_c(B^n(\varepsilon))$ agit transitivement sur $B^n(\varepsilon)$, i.e. $\forall\, x, y \in B^n(\varepsilon),\ \exists\, \varphi \in Diff_c(B^n(\varepsilon)),\ \varphi(x) = y$.

(iii) Soit M une variété connexe. Montrer que $Diff_c(M)$ agit transitivement sur M.

Exercice 4. On joue au jeu suivant : dans $\mathbb{R}^2$ on dispose d'une droite orientée $d \subset \mathbb{R}^2$ que l'on a le droit de bouger continûment. Le but du jeu est de ramener la droite d à la position initiale avec l'orientation renversée tout en évitant les tangences avec une courbe γ donnée. Pour lesquelles des courbes $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ ci-dessous on peut le faire, et pour lesquelles non ?