# COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014
*FEUILLE D'EXERCICES NO. 2 : CHAMPS DE VECTEURS, DÉRIVÉE DE LIE*
*COMPLÉMENT DE COURS : FIBRÉS VECTORIELS*

ALEXANDRU OANCEA

**Exercice 1. (crochet, flots, dérivée de Lie)**

Soit $M$ une variété et $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteurs. On note $\varphi^t$ le flot de $X$ et $\psi^t$ le flot de $Y$.

*Partie I.* Démontrer les formules suivantes :

(i) $\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*Y = (\varphi^t)^*[X,Y]$.

(ii) $[X,Y] = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\psi^s)_*X$.

(iii) $[X,Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}\psi^{-s}\varphi^{-t}\psi^s\varphi^t$.

(iv) $[X,Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi^{-\sqrt{t}}\varphi^{-\sqrt{t}}\psi^{\sqrt{t}}\varphi^{\sqrt{t}}$.

*Partie II.* Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(a) $[X,Y] = 0$.

(b) $(\varphi^t)^*Y = Y$.

(c) $(\psi^s)^*X = X$.

(d) $\varphi^t$ et $\psi^s$ commutent.

**Exercice 2. (compléments sur le premier théorème fondamental de la théorie de Morse)** On se place sous les hypothèses du théorème cité : $M$ est une variété, $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse propre, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de valeurs régulières avec $a < b$. Démontrer les affirmations suivantes :

(i) $f^{-1}(a) \simeq f^{-1}(b)$.

(ii) $f^{-1}([a,b]) \simeq f^{-1}(a) \times [0,1]$.

(iii) $\{f \leq a\}$ est retracte par déformation de $\{f \leq b\}$.

*Rappel :* une partie $A$ d'un espace topologique $X$ est *retracte par déformation* s'il existe une famille d'applications continues $r_t : X \to X$,

*Date*: 17 Septembre 2013.

$t \in [0,1]$, continue par rapport à $t$, telle que $r_0 = \mathrm{Id}_X$, $r_1(X) = A$ et $r_t|_A = \mathrm{Id}_A$ pour tout $t \in [0,1]$. La continuuité de la famille $r_t$ par rapport à $t \in [0,1]$ signifie que l'application $[0,1] \times X \to X$, $(t,x) \mapsto r_t(x)$ est continue.

**Exercice 3. (démonstration alternative du théorème de Frobenius)** On rappelle l'énoncé : $M$ est une variété de dimension $m$, $\mathcal{D} \subset TM$ est un distribution lisse et involutive de rang $r \leq m$. Pour tout point $p \in M$ il existe une carte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ au voisinage de $p$ telle que $\{x_{r+1} = cte, \ldots, x_m = cte\}$ soient des sous-variétés intégrales de $\mathcal{D}$. L'on se propose de démontrer le théorème par récurrence sur le rang $r \geq 1$. (ceci est la preuve présentée dans le livre de Warner).

(1) Montrer le cas $r = 1$ ($m$ arbitraire).

(2) L'on démontre que, si le théorème est vrai en rang $r-1$ et dimension $m-1$, alors il est vrai en rang $r$ et dimension $m$.

Soit $X_1, \ldots, X_r$ repère local pour $\mathcal{D}$ au voisinage d'un point $p \in M$.

(i) Justifier que l'on peut supposer $X_1 = \partial/\partial x_1$ dans une carte $(V, \psi = (x_1, \ldots, x_m))$ appropriée, avec $\psi(p) = 0$.

(ii) Considérons le changement de repère $(X_1, \ldots, X_r) \mapsto (Y_1, \ldots, Y_r)$ avec $Y_1 := X_1$ et

$$Y_i := X_i - X_i(y_1)X_1, \qquad 2 \leq i \leq r.$$

On note $S := \{x_1 = 0\} \cap V$ et $Z_i := Y_i|_S$, $2 \leq i \leq r$. Justifier que les $Z_i$ sont des champs de vecteurs tangents à $S$ et que la distribution qu'ils engendrent dans $TS$ est involutive.

(iii) Soit $(w_2, \ldots, w_m)$ une carte *sur* $S$ telle que fournie par l'hypothèse de récurrence. Soit $\pi : V \to S$ la projection sur les coordonnées $(x_2, \ldots, x_m)$ dans le système $(x_1, \ldots, x_m)$. Montrer que

$$\begin{aligned} &y_1 := x_1, \\ &y_i := w_i \circ \pi, \qquad 2 \leq i \leq m \end{aligned}$$

est un système de coordonnées sur $M$.

(iv) Montrer que l'on a $Y_i(y_j) = 0$ pour $r+1 \leq j \leq m$ et conclure que le système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_m)$ convient. L'on pourra remarquer le fait que $Y_1 = \partial/\partial y_1$ et utiliser l'involutivité de $\mathcal{D}$ pour écrire

$$\frac{\partial}{\partial y_1} Y_i(y_j) = \sum_{ell=2}^{r} a_{ij\ell} Y_\ell(y_j), \qquad 2 \leq i \leq r.$$

En utilisant l'unicité des solutions pour des équations différentielles linéaires, l'on déduira $Y_i(y_j) = 0$ pour $2 \leq i \leq r$ et $j$ fixé arbitraire.

**Complément de cours sur les fibrés vectoriels (+ exercices).**

Voici quatre points de vue sur les fibrés vectoriels.

**I.** Fibré vectoriel = famille d'espaces vectoriels paramétrée par les points de la base.

**Le point de vue de la $K$-théorie** est le suivant : plus la base a une topologie compliquée, plus la famille peut être non-triviale. En étudiant *tous* les fibrés (sur une base donnée) à la fois, on obtient des informations sur la topologie de la base.

*Exemples, exercices.*

*Théorème de Ehresmann-Feldbau :* Un fibré sur une base contractile est trivial. (Nous allons démontrer une version de ce théorème lorsque nous parlerons de connexions sur un fibré).

*Définition :* On dit que $B$ est contractile s'il existe une fonction continue $f : B \times [0,1] \to B$ telle que $f(\cdot, 0) = \mathrm{Id}_B$ et $f(\cdot, 1) = cte$.

*Exercice :* Montrer que la boule unité $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < 1\}$ est contractile. Plus généralement, montrer que tout ouvert étoilé dans $\mathbb{R}^n$ est contractile.

*Exercice :* Montrer que tout fibré au-dessus d'un intervalle est trivial.

*Exercice :* Montrer qu'il existe exactement deux types d'isomorphisme de fibrés en droites réelles sur le cercle $S^1$ : le fibré trivial $\theta^1_{S^1}$, et un fibré non-trivial que l'on note $\mu^1_{S^1}$ et que l'on appelle "bande de Möbius" (pourquoi ?)

*Remarque/conséquence :* $S^1$ n'est pas difféomorphe/homéomorphe à un intervalle. Bien-sûr, c'est une façon très compliquée de le démontrer, mais qui devient efficace en dimension supérieure !

**II.** Fibré vectoriel = la donnée d'informations "infinitésimales" et "linéaires" sur la base.

**Le point de vue des petites déformations** est le suivant : étant donnée une sous-variété $M^n \subset N^{n+k}$, quelles sont les propriétés des petites déformations de $M$ dans $N$ ?

*Définition :* Le fibré normal à $M$ dans $N$ est

$$\nu_N M := \sqcup_{p \in M} T_p N / T_p M.$$

*Exercice :* Montrer que $\nu_N M$ est un fibré vectoriel de rang $k$.

*Exercice :* Choisissons une métrique riemannienne sur $N$. Montrer que $TM^\perp = \sqcup_{p \in M} T_p M^\perp$ est un fibré vectoriel isomorphe à $\nu_N M$.

*Théorème du voisinage tubulaire :* Il existe un voisinage de $M$ dans $N$ qui est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans $\nu_N M$. (Nous allons démontrer ce théorème pendant la semaine 4 du cours.)

*Conséquence :* L'étude des déformations $C^1$-petites de $M$ dans $N$ est équivalente à l'étude des sections de $\nu_N M$ (Exercice : pourquoi $C^1$ dans cet énoncé, et pas $C^0$ ?)

*Exercice :* Un voisinage de la section nulle de $\theta^1_{S^1}$ est un cylindre $S^1 \times I$. Un voisinage de la section nulle de $\mu^1_{S^1}$ est une bande de Möbius.

*Exercice :* (i) Considérons $S^1 \subset S^2$ comme équateur. Montrer que le fibré normal est trivial.

(ii) Considérons $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 = \{[a : b : c] \in \mathbb{R}P^2 : c = 0\} \subset \mathbb{R}P^2$. Montrer que le fibré normal est $\mu^1_{S^1}$. (Ceci est relié à un certain phénomène de géométrie projective. Lequel ?)

**III. Le point de vue de l'analyse non-linéaire est le suivant :** l'espace tangent (en un point) à un espace de fonctions est l'espace des sections d'un fibré approprié.

*Définition (tiré-en-arrière, ou "pull-back").* Soit $f : M \to N$ (lisse) et $E \xrightarrow{\pi} N$ un fibré. On définit son *tiré-en-arrière* comme étant

$$f^*E := \sqcup_{p\in M} E_{f(p)}.$$

*Exercice :* $f^*E$ possède une structure naturelle de fibré vectoriel et l'on a un morphisme naturel de fibrés $f^*E \to E$ qui relève $f$ et qui est un isomorphisme sur les fibres.

*Exemple :* Soient $S$ et $B$ des variétés ($S$ comme "source" et $B$ comme "but"). Considérons

$$\mathcal{F}(S, B) := \{u : S \to B \text{ de classe } C^\infty\}.$$

Ceci est moralement une variété de dimension infinie (je dis "moralement", parce-qu'elle n'est pas modelée sur un espace de Banach, mais plutôt sur un espace de Fréchet). Toujours est-il qu'une définition raisonnable de l'espace tangent en $u$ à $\mathcal{F}(S, B)$ est

$$T_u\mathcal{F}(S, B) := \Gamma(u^*TB).$$

En effet, un vecteur tangent en $u$ à $\mathcal{F}(S, B)$ est la dérivée d'une courbe dans $\mathcal{F}(S, B)$ passant par $u$, i.e. $\frac{d}{dt}|_{t=0}u_t$, où $u_t \in \mathcal{F}(S, B)$, $u_0 = u$, $t \in \mathbb{R}$. Une façon de donner sens à cette expression est de la penser comme étant une collection $(\frac{d}{dt}|_{t=0}u_t(p))_{p\in S}$. Or $u_t(p)$ est une courbe dans $B$ par $u(p)$ et ceci est par conséquent une collection indexée par $p \in S$ de vecteurs tangents appartenant à $T_{u(p)}B$, c'est-à-dire une section de $u^*TB$.

**IV. Les sections d'un fibré sont des généralisations des fonctions $f : M \to \mathbb{K}^r$.** (Ces dernières sont exactement les sections du fibré trivial de rang $r$.) On peut redire cela d'une manière différente : certains objets naturels sur des variétés ne sont pas des fonctions, mais des sections de fibrés (par exemple les champs de vecteurs, ou bien les formes différentielles).

*Exercice (Exemple fondamental).* Fibrés $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}P^1$.

On note un point de $\mathbb{C}P^1$ par $[z : w]$, qui désigne la droite dont $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est un vecteur directeur. Ainsi $[z : w] = [\lambda z : \lambda w]$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On considère des cartes

$$U := \{w \neq 0\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}, \qquad [z : w] \mapsto z/w,$$

$$V := \{z \neq 0\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}, \qquad [z : w] \mapsto w/z.$$

On a alors $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^{-1}$.

(i) Le fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ est défini comme ayant pour fibre au-dessus de $[z : w] \in \mathbb{C}P^1$ la droite de $\mathbb{C}^2$ dont $(z, w)$ est un vecteur directeur. Réaliser cela comme fibré avec fonction de transition

$$\Phi_{VU} : U \cap V \to \mathbb{C}^*, \qquad [z : w] \mapsto z/w,$$

c'est-à-dire donner deux trivialisations $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ au-dessus de $U$ et $V$ respectivement telles que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C} \to (U \cap V) \times C$ ait la forme $([z : w], v) \mapsto ([z : w], \Phi_{VU}([z : w])v)$.

[*Sous-exercice :* Toujours, pour un fibré vectoriel avec des trivialisations locales $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$, la composition $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r$ est de la forme $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{\beta\alpha}(p)v)$, pour une certaine application $\Phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{K})$, appelée *fonction de transition*. Réciproquement, étant donné un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ et une collection de fonctions $\Phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{K})$, celles-ci définissent un unique fibré de rang $r$ sur $\mathbb{K}$ muni de trivialisations locales dont elles sont les fonctions de transition, à condition qu'elles vérifient les conditions suivantes : (1) $\Phi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}$, et (2) $\Phi_{\alpha\gamma}\Phi_{\gamma\beta}\Phi_{\beta\alpha} = \mathrm{Id}$ (on l'appelle *condition de cocycle*).]

(ii) On définit le fibré $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ par la fonction de transition $\Phi_{VU} : U \cap V \to \mathbb{C}^*$, $[z : w] \mapsto (w/z)^k$.

Montrer que $\mathcal{O}(0)$ est trivial.

Montrer que $\mathcal{O}(1)$ est le dual de $\mathcal{O}(-1)$.

Montrer que $\mathcal{O}(k)$ n'a pas de section *holomorphe* non-nulle pour $k < 0$. (Bien-sûr, une section holomorphe est une section qui est holomorphe dans chacune des trivialisations locales. Cette notion fait sens ici puisque les fonctions de transition sont holomorphes. On dit que $\mathcal{O}(k)$ est un *fibré holomorphe*.)

Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$, $k > 0$ s'identifie à l'espace des polynômes de degré $\leq k$ dans $\mathbb{C}$, ou encore à l'espace des polynômes homogènes de degré $k$ dans $\mathbb{C}^2$.

Montrer que l'espace des sections *lisses* de $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ s'identifie à l'espace des fonctions lisses (à valeurs complexes) sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ qui sont homogènes de degré $k$ : $f(\lambda v) = \lambda^k f(v)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.