COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

FEUILLE D'EXERCICES NO. 3 : ORIENTABILITÉ, FORMES DIFFÉRENTIELLES, INTÉGRATION

ALEXANDRU OANCEA

ORIENTABILITÉ

Exercice 1.

Soit M^n une variété de dimension n. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est orientable.

(ii) Le fibré en droites $\Lambda^n TM$ est trivial.

(iii) Il existe sur M une n-forme différentielle qui ne s'annule pas.

Exercice 2. Montrer que toute variété complexe est canoniquement orientée.

Exercice 3. Soit M une variété orientable à k composantes connexes. Montrer que M possède 2^k orientations possibles.

Exercice 4. Montrer que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ de dimension n est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 5. Donner une paramétrisation explicite d'une bande de Möbius en tant que sous-variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Vérifier que celle-ci est non-orientable en utilisant la définition et un atlas à deux cartes.

Exercice 6. Soit M une variété orientable, $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, $y \in \mathbb{R}$ une valeur régulière. Montrer que la sous-variété $f^{-1}(y) \subset M$ est orientable.

Date: 24 Septembre 2013.

FORMES DIFFÉRENTIELLES, INTÉGRATION

Exercice 7. (formules globales)

Définition. *Soit A une algèbre associative graduée, c'est-à-dire $A = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ et $A_k \cdot A_\ell \subset A_{k+\ell}$. Une dérivation de degré $d := |D|$ est une application linéaire*

$$D : A_{\cdot} \to A_{\cdot+d}$$

telle que

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + (-1)^{|a|\cdot|D|} a \cdot Db$$

On note $\mathrm{Der}(A)$ *l'espace vectoriel des dérivations de A.*

Lemme. On définit sur $\mathrm{Der}(A)$ le crochet

$$[D, D'] := DD' - (-1)^{|D|\cdot|D'|} D'D.$$

Montrer que $(\mathrm{Der}(A), [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire elle vérifie la relation d'ANTI-SYMÉTRIE GRADUÉE

$$[D, D'] + (-1)^{|D|\cdot|D'|}[D', D] = 0$$

et l'IDENTITÉ DE JACOBI GRADUÉE

$$(-1)^{|D_1||D_3|}[D_1, [D_2, D_3]] + (-1)^{|D_2||D_1|}[D_2, [D_3, D_1]] + (-1)^{|D_3||D_2|}[D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

Lemme. Soit M une variété différentiable.
(i) Deux dérivations sur $\Omega^{\cdot}(M)$ coïncident ssi elles coïncident sur $\Omega^0(M)$ et $\Omega^1(M)$.
(ii) Deux dérivations sur $\Omega^{\cdot}(M)$ qui commutent avec la différentielle extérieure d coïncident ssi elles coïncident sur $\Omega^0(M)$.

Théorème (formule de Cartan). Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. On rappelle que la dérivée de Lie $L_X : \Omega^{\cdot}(M) \to \Omega^{\cdot+1}(M)$ est définie par la formule

$$L_X\omega := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi^t)^*\omega, \qquad \phi^t = \phi^t_X.$$

La contraction par X, notée $\iota_X : \Omega^{\cdot}(M) \to \Omega^{\cdot-1}(M)$, est définie par la formule

$$(\iota_X\omega)(Y_2, \ldots, Y_k) := \omega(X, Y_2, \ldots, Y_k), \qquad \omega \in \Omega^k(M).$$

Montrer l'identité

$$L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X = [\iota_X, d] \qquad \textit{(formule de Cartan)}$$

en démontrant que les deux termes de cette identité sont des dérivations qui commutent avec d et qui coïncident sur $C^\infty(M)$.

Proposition (formule de Leibniz pour la dérivée de Lie). Soient $\omega \in \Omega^p(M)$ et $X, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathcal{X}(M)$. Démontrer l'identité

$$L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)) = (L_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(Y_1, \ldots, L_X Y_i, \ldots, Y_p).$$

Proposition (formule globale pour la différentielle extérieure). Soient $\omega \in \Omega^p(M)$ et $Y_0, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathcal{X}(M)$. Montrer l'identité

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0, \ldots, Y_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i Y_i(\omega(Y_0, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, Y_p)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, \widehat{Y_j}, \ldots, Y_p). \end{aligned}$$

(On pourra raisonner par récurrence en s'appuyant sur les deux résultats précédents.) Détailler cette formule pour $p = 0, 1, 2$.

Exercice 8. (intégration) Étant donnée une variété riemannienne de dimension n orientée (M^n, g) on note $dvol_g$, ou $dvol_g^M \in \Omega^n(M)$ l'unique n-forme telle que

$$dvol_g(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

pour tout repère orthonormé positif $(e_1, \ldots, e_n)$. On note $\mathrm{Vol}(M^n, g) = \int_M dvol_g$.

(i) Montrer que $dvol_g$ est bien définie.

(ii) Montrer que la forme volume pour $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne et de l'orientation canonique est $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

(iii) Soient $S^{n-1}(r) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_i x_i^2 = r^2\}$ la sphère de rayon $r > 0$ et $B^n(r) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_i x_i^2 \leq r^2\}$ la boule fermée de rayon r. On munit $S^{n-1}(r)$ de la métrique g induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et de l'orientation héritée en tant que bord de $B^n(r)$. On note $I : S^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusion. Montrer que

$$dvol_g(x) = I^*\big(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n).$$

En déduire que $\mathrm{Vol}(S^{n-1}(r), g) = r^{n-1} \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1), g)$.

(iv) Soit

$$\Psi :]0, \infty[\times S^{n-1}(1) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (r, x) \mapsto rx.$$

Montrer que

$$\Psi^* dvol_g^{\mathbb{R}^n} = r^{n-1} dr \wedge dvol_g^{S^{n-1}(1)}.$$

(v) En déduire que
$$\frac{d}{dr}\mathrm{Vol}(B^n(r), g) = \mathrm{Vol}(S^{n-1}(r), g).$$

Exercice 9. (forme symplectique canonique sur le cotangent)

Soit M une variété différentiable et $\pi : T^*M \to M$ son fibré cotangent. On définit une 1-forme canonique λ sur T^*M de la manière suivante : étant donnés $q \in M$, $p \in T_q^*M$ et $X \in T_{(q,p)}T^*M$, on pose
$$\lambda_{(q,p)}(X) := p(\pi_* X).$$
On appelle λ *la forme de Liouville* sur T^*M. La 2-forme
$$\omega := d\lambda$$
est appelée *forme symplectique canonique du cotangent.*

(i) Soit $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$ une carte locale sur M. Celle-ci détermine un repère local de trivialisation $(dq_1, \dots, dq_n)$ pour $T^*M|_U$ et l'on note les fonctions coordonnées correspondantes par $p_i : T^*M|_U \to \mathbb{R}$, de sorte que tout covecteur sur U s'exprime de manière unique comme $\sum_i p_i dq_i$. Montrer que l'on a
$$\lambda = \sum_i p_i dq_i,$$
où l'on regarde cette fois-ci dq_i comme des 1-formes sur $T^*M|_U$ par tiré-en-arrière. (Notation classique abrégée : $\lambda = pdq$.)

(ii) Montrer que l'on a
$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i.$$
(Notation classique abrégée : $\omega = dp \wedge dq$.)

(iii) Justifier que ω est fermée.

(iv) Montrer que ω est non-dégénérée :
$\forall\,(q,p) \in T^*M,\ \forall\, 0 \neq X \in T_{(q,p)}T^*M,\ \exists\, Y \in T_{(q,p)}T^*M,\ \omega(X,Y) \neq 0.$
En déduire que ω établit un isomorphisme entre TT^*M et T^*T^*M.

(v) Soit $Z \in \mathcal{X}(T^*M)$ le champ de vecteurs dual à λ par ω, appelé aussi *champ de Liouville* :
$$\omega(Z, \cdot) = \lambda.$$
Montrer que le flot φ_Z^t de Z vérifie les relations
$$(\varphi_Z^t)^*\lambda = e^t\lambda, \qquad (\varphi_Z^t)^*\omega = e^t\omega.$$
(L'on utilisera la formule de Cartan pour la dérivée de Lie.)