COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

FEUILLE D'EXERCICES NO. 4 : DEGRÉ; VARIA

ALEXANDRU OANCEA

Exercice 1 (théorème fondamental de l'algèbre). Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant possède une racine.

(i) Montrer que P définit une application lisse propre $\tilde{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(ii) Montrer que le degré (algébrique) de P est égal au degré (topologique) de $\tilde{P}$. L'on pourra utiliser (avec soin) l'invariance par homotopie du degré topologique et se ramener au cas où P est un monôme.

(iii) Conclure.

[Pour une démonstration alternative, dans le même esprit, consulter par exemple J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. of Virginia Press, 1956. Ce petit livre de moins de 60 pages est un joyau.]

Exercice 2. Écrire les détails de la preuve géométrique (esquissée en cours) du résultat suivant : si $f : M \to N$ est une application propre entre variétés orientées qui admet une extension $\tilde{f} : W \to N$ avec W variété orientée telle que $\partial W = M$, alors $\deg f = 0$.

(i) si $y \in N \setminus \partial N$ est une valeur régulière pour f *et* $\tilde{f}$, alors $\tilde{f}^{-1}(y)$ est une sous-variété à bord de W et $\partial \tilde{f}^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y) \cap \partial W$.

(ii) sous les mêmes conditions, le fibré normal $\nu_W \tilde{f}^{-1}(y)$ à $\tilde{f}^{-1}(y)$ dans W est trivial, égal à $(d\tilde{f})^* T_y N$, et par conséquent naturellement orienté. Ceci détermine une orientation naturelle sur $\tilde{f}^{-1}(y)$, en demandant que l'isomorphisme naturel

$$T_x \tilde{f}^{-1}(y) \oplus \nu_W \tilde{f}^{-1}(y) \simeq T_x W$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels orientés pour tout $x \in \tilde{f}^{-1}(y)$.

(iii) pour tout $x \in \partial \tilde{f}^{-1}(y)$, le signe donné par l'orientation en tant que bord de $\tilde{f}^{-1}(y)$ est égal au signe de $df(x) : T_x M \to T_y N$.

(iv) Conclure, en utilisant le fait qu'une variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe au cercle ou à un intervalle fermé. (Il est très instructif de refléchir à cette dernière affirmation. Si jamais vous ne touvez pas, et seulement dans ce cas, consulter Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint.*)

Exercice 3. (les différents points de cet exercice ne sont pas strictement liés les uns aux autres)

(i) Construire un champ de vecteurs non-nul sur S^{2n-1}. L'on pourra regarder $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ et utiliser la structure complexe.

Date: 1er Octobre 2013.

(ii) Construire trois champs de vecteurs sur S^3 qui sont linéairement indépendants en tout point. L'on pourra regarder S^3 comme la sphère unité dans l'espace des quaternions $\mathbb{H}$.

(iii) Soit G un groupe de Lie. Montrer que le fibré tangent est trivial. Retrouver (ii).

(iv) Montrer que S^3 est difféomorphe à $SU(2)$. L'on pourra identifier $SU(2)$ avec le groupe des quaternions unitaires.

(v) Montrer que $\mathbb{R}P^3$ est difféomorphe à $SO(3)$. L'on pourra regarder $\mathbb{R}P^3$ comme la boule de dimension 3 et rayon π avec les points du bord identifiés par l'application antipodale.

(vi) Décrire $SU(2)$ comme revêtement à deux feuillets de $SO(3)$.

Exercice 4. Se convaincre que les formules de Green-Riemann, Ostrogradski, Stokes en théorie des champs sont des cas particuliers du théorème de Stokes. Par exemple, pour le théorème flux-divergence, l'on utilisera le fait que, si X est un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ désigne la forme volume euclidienne, alors

$$d(i_X\omega) = (\operatorname{div} X)\omega.$$

Exercice 5. Soit $\omega := \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^{2n}$, où $\mathbb{R}^{2n}$ est muni de coordonnées $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.

(i) Calculer $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$, où le produit contient n facteurs. En déduire que ω est une 2-forme non-dégénérée au sens décrit sur la feuille d'exercices précédente.

(ii) Pour toute fonction différentiable $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ on définit un champ de vecteurs appelé *champ hamiltonien de* H par l'identité

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

On appelle H *le Hamiltonien*. Montrer que les trajectoires de X_H sont les solutions des équations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

(iii) Montrer que $L_{X_H}\omega = 0$. Déduire que le flot de X_H préserve la forme symplectique et aussi le volume des ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$.

(iv) Soit maintenant $H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(q, p, t) = H_t(q, p)$ un Hamiltonien qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$. On définit un champ de vecteurs dépendant du temps X_H^t, $t \in \mathbb{R}$ par la formule

$$\omega(X_H^t, \cdot) = -dH_t.$$

Montrer que les conclusions des points (ii) et (iii) restent vraies.

[En mécanique classique, les flots de champs hamiltoniens s'appellent *transformations canoniques*. Celles-ci préservent le volume et sont par conséquent sujettes au théorème de récurrence de Poincaré. Pour votre culture, je vous encourage à lire au moins les quelques premiers chapitres du livre de V.I. Arnol'd, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*.]