COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

FEUILLE D'EXERCICES NO. 5 : TRANSVERSALITÉ; DEGRÉ; NOMBRE D'EULER

ALEXANDRU OANCEA

Exercice 1. Soient X et Y deux variétés modelées sur des espaces de Banach séparables. Si $f : X \to Y$ est une application de Fredholm d'indice négatif, alors l'image de f est un ensemble d'intérieur vide.

Exercice 2. (i) Soient V, W des espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(V, W)$ une application linéaire et continue de Fredholm.

(i.1) Si $V' \subset V$ est un sous-espace de codimension finie k, alors $L|_{V'} : V' \to W$ est une application de Fredholm d'indice

$$\mathrm{ind}(L|_{V'}) = \mathrm{ind}(L) - k.$$

(i.2) Si $V \subset \tilde{V}$ est une inclusion de codimension ℓ et $\tilde{L} : \tilde{V} \to W$ étend L, alors $\tilde{L}$ est de Fredholm et

$$\mathrm{ind}(\tilde{L}) = \mathrm{ind}(L) + \ell.$$

(ii) Soit $f : X \to Y$ une application de Fredholm entre des variétés de Banach. Si $\mathcal{M} \subset X$ est une sous-variété de codimension k, alors $f|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to Y$ est une application de Fredholm d'indice

$$\mathrm{ind}(f|_{\mathcal{M}}) = \mathrm{ind}(f) - k.$$

Exercice 2. Démontrer que les applications $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 qui sont injectives forment un sous-ensemble de deuxième catégorie de Baire dans $\mathcal{F} := C^1(S^1, \mathbb{R}^3)$. Ou encore : toute application $S^1 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 peut être approchée par une suite d'applications C^1 injectives.

[L'on pourra considérer la diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in S^1\} \subset S^1 \times S^1$*, définir l'application*

$$\Phi : \mathcal{F} \times (S^1 \times S^1 \setminus \Delta) \to \mathbb{R}^3, \qquad (f, x, y) \longmapsto f(x) - f(y),$$

montrer que l'espace de modules universel $\mathcal{M} := \Phi^{-1}(0)$ *est une sous-variété de Banach de codimension* 3*, et finalement montrer que la projection* $\mathcal{M} \to \mathcal{F}$ *est une application de Fredholm d'indice* -1*.]*

Exercice 3 (théorème de plongement de Whitney). L'on montre ici que toute variété compacte M^n de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ par un argument de généricité : l'ensemble des plongements de classe C^2 de M dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ est de

Date: 8 Octobre 2013.

deuxième catégorie dans $C^2(M^n, \mathbb{R}^{2n+1})$. L'on pourra montrer séparément cette propriété pour les applications injectives et pour les immersions.

Exercice 4. Soit $Z \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et X une variété (compacte). Montrer que l'ensemble des applications $X \to \mathbb{R}^n$ qui sont transverses à Z est de deuxième catégorie dans $C^1(X, \mathbb{R}^n)$.

[L'on pourra considérer l'espace de Banach $\mathcal{F} := C^1(X, \mathbb{R}^n)$, montrer que $\mathcal{M} := \{(f, x) \,:\, f(x) \in Z\} \subset \mathcal{F} \times X$ est une sous-variété de Banach et montrer que $f \in \mathcal{F}$ est une valeur régulière de la projection $\mathcal{M} \to \mathcal{F}$ si et seulement si $f \pitchfork Z$.]

Déduire par approximation que l'ensemble des applications C^∞ de X dans $\mathbb{R}^n$ qui sont transverses à Z est dense dans $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.

Démontrer les mêmes résultats lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par une variété Y quelconque. Dans ce cas $C^1(X, Y)$ est une variété de Banach.

Exercice 5. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme linéaire. Soit $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la sphère unité. Montrer que le degré de l'application

$$S^{n-1} \to S^{n-1}, \qquad x \longmapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

vaut ± 1 selon que A préserve ou renverse l'orientation.

Exercice 6. Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite *de Morse* si, en tout point $x \in M$ tel que $df(x) = 0$ (point critique), la *hessienne*

$$d^2 f(x) : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$$

définie par

$$d^2 f(x)(X, Y) := X_x(\tilde{Y} f)$$

avec $\tilde{Y}$ une extension locale quelconque de Y, est une application bilinéaire symétrique non-dégénérée.

Montrer que f est de Morse si et seulement si la section $df \in \Gamma(T^*M)$ est transverse à la section nulle.

Démontrer que les fonctions de Morse forment un ensemble de deuxième catégorie dans $C^2(M, \mathbb{R})$.

Exercice 7. (i) Montrer que le nombre d'Euler d'une sphère de dimension paire vaut 2 (l'on pourra considérer par exemple le champ de vecteurs qui engendre une rotation).

(ii) Montrer que le nombre d'Euler du tore

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$$

vaut 0.

(iii) Montrer que le nombre d'Euler d'une surface de Riemann de genre g vaut $2 - 2g$.

(iv) Montrer que le nombre d'Euler $e(X)$ d'une variété compacte X satisfait à la relation

$$e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y).$$