COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

FEUILLE D'EXERCICES NO. 6 : ALGÈBRE HOMOLOGIQUE; MAYER-VIETORIS; VARIA

ALEXANDRU OANCEA

Exercice 1. Démontrer le "Lemme des cinq" : si dans le diagramme commutatif d'espaces vectoriels suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ A_1' & \longrightarrow & A_2' & \longrightarrow & A_3' & \longrightarrow & A_4' & \longrightarrow & A_5' \end{array}$$

les lignes sont exactes et f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 2. Fournir les détails de la preuve de l'existence et du caractère fonctoriel de la suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes.

Exercice 3. Considérons le morphisme de suites exactes courtes d'espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Démontrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to \ker a \to \ker b \to \ker c \to \operatorname{coker} a \to \operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c \to 0.$$

De façon alternative, déduire ce résultat en utilisant la suite exacte longue d'homologie associée à une suite exacte courte de complexes différentiels.

Exercice 4. Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris et une récurrence sur la dimension $n \geq 1$ pour montrer que la cohomologie de de Rham de la sphère S^n est non-triviale uniquement en degrés 0 et n, où elle est de rang 1.

Exercice 5. Soit M une variété compacte orientée sans bord de dimension impaire. Déduire l'annulation de la caractéristique d'Euler-Poincaré de $H^*(M)$ comme conséquence du théorème de dualité de Poincaré.

Date: 15 Octobre 2013.

Exercice 6. Étudier la preuve du lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts dans Bott-Tu, pp. 38-39.

Exercice 7 (intégration dans la fibre – cf. Bott-Tu, pp. 61-63). Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel orienté de rang r et notons $\Omega^*_{cv}(E)$ l'algèbre des formes différentielles à support compact dans chaque fibre (*support compact vertical*). Nous définissons ici une application $\mathbb{R}$-linéaire dite "d'intégration dans la fibre"

$$\pi_* : \Omega^*_{cv}(E) \to \Omega^{*-r}(M)$$

telle que $\pi_* d = d\pi_*$.

(i) Soit $M = U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $E = U \times \mathbb{R}^r$. Notons un point de $U \times \mathbb{R}^r$ par (x, t). On définit $\pi_* : \Omega^*_{cv}(U \times \mathbb{R}^r) \to \Omega^{*-r}(U)$ de la manière suivante. Toute k-forme sur $U \times \mathbb{R}^r$ s'écrit comme somme de k-formes de l'un des types suivants

$$f(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_q}, \qquad p+q=k, \qquad q<r$$

ou bien

$$f(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-r}} \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r.$$

On définit π_* par

$$f(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_q} \mapsto 0$$

dans le premier cas, et

$$f(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-r}} \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^r} f(x,t)dt\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-r}}$$

dans le deuxième cas. On étend π_* à $\Omega^*_{cv}(U \times \mathbb{R}^r)$ par $\mathbb{R}$-linéarité. Montrer que l'on a $\pi_* d = d\pi_*$.

(ii) Soit $(U_\alpha, \Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$ un atlas de trivialisation pour E tel que les U_α soient des ouverts de carte pour M. Étant donnée $\alpha \in \Omega^k_{cv}(E)$ on définit en vue de (i)

$$(\pi_*\alpha)|_{U_\alpha} := \pi_*(\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}).$$

Montrer que ces formules définissent une $k-r$-forme globale sur M, qui ne dépend pas des différents choix de cartes/trivialisations.

(iii) Montrer que $\pi_* d = d\pi_*$.

Remarque. Il est démontré dans Bott-Tu, p. 63 que

$$\pi_* : H^*_{cv}(E) \xrightarrow{\sim} H^{*-r}(M)$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme "de Thom" est le même que celui fourni par la dualité de Poincaré lorsque M est compacte orientée. Ici $H^*_{cv}(E)$ est la cohomologie de de Rham à support compact vertical*, définie comme étant la cohomologie du complexe $(\Omega^*_{cv}(E), d)$. Bien-sûr, ce dernier coïncide avec $(\Omega^*_c(E), d)$ lorsque M est compacte — c'est le cadre que nous avons adopté en cours.*

L'inverse de l'isomorphisme de Thom est

$$H^{*-r}(M) \xrightarrow{\sim} H^*_{cv}(E), \qquad \alpha \mapsto \pi^*\alpha \wedge \Phi,$$

avec $\Phi \in H^r_{cv}(E)$ la classe de Thom.