COURS INTRODUCTIF M2 MATHS FONDAMENTALES UPMC "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

(A. OANCEA)

EXAMEN DU 21 OCTOBRE 2013

DURÉE : 4H

Les notes de cours sont autorisées. Les moyens électroniques ne sont pas autorisés. La clarté et la précision de la rédaction seront appréciées.

Exercice 1. Soit M une variété et $V \subset TM$ une distribution lisse d'hyperplans (codimension 1). On dit que V est *co-orientable* si TM/V est un fibré orientable.

(i) Montrer que V est co-orientable si et seulement si il existe une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(M)$ partout non-nulle telle que $V = \ker \alpha$.

On suppose désormais que V est co-orientable et on appelle une telle 1-forme α *forme de définition pour V*.

(ii) Soit α une forme de définition. Montrer que V est intégrable si et seulement si $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

On suppose désormais que cette condition est remplie. *[V est un "feuilletage"].*

(iii) Montrer qu'il existe une 1-forme β, uniquement déterminée à un multiple de α près, telle que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$.

Montrer que $\alpha \wedge d\beta = 0$ et déduire l'existence d'une 1-forme γ telle que $d\beta = \alpha \wedge \gamma$.

Montrer que la 3-forme $\beta \wedge d\beta$ est fermée, et que sa classe de cohomologie ne dépend pas des choix de α et β. *["classe de Godbillon-Vey du feuilletage".]*

(iv) Montrer qu'il existe un champ de vecteurs X tel que $\alpha(X) = 1$. Montrer que, étant donné un tel champ de vecteurs, l'on peut choisir

$$\beta = \mathcal{L}_X \alpha, \qquad \gamma = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_X \alpha.$$

Exercice 2. Soient M^n et N^n deux variétés connexes de même dimension $n \geq 1$. On définit la *somme connexe* de M et N, notée $M\#N$, de la manière suivante : on choisit des points $p \in M \setminus \partial M$, $q \in N \setminus \partial N$, des cartes locales (U, φ) et (V, ψ) autour de p, respectivement q avec $\varphi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$, $\varphi(U) = \psi(V) = \mathbb{R}^n$. L'espace topologique sous-jacent à la somme connexe est

$$M\#N := \big(M \setminus \varphi^{-1}(B(0,1))\big) \sqcup \big(N \setminus \psi^{-1}(B(0,1))\big) / \sim$$

avec $x \sim y$ si et seulement si il existe $z \in S(0,1)$ tel que $\varphi(x) = \psi(y) = z$. On définit un atlas sur $M\#N$ en considérant un atlas sur $M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B}(0,1))$, un atlas sur $N \setminus \psi^{-1}(\overline{B}(0,1))$, et la carte

$$F : \varphi^{-1}({}^c B(0,1)) \sqcup \psi^{-1}({}^c B(0,1))/\sim \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

$$F(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in \varphi^{-1}({}^c B(0,1)), \\ I \circ \psi(x), & x \in \psi^{-1}({}^c B(0,1)), \end{cases}$$

où $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est l'inversion donnée par $I(x) := x/\|x\|^2$.

Nous avons utilisé les notations suivantes : étant donnés des ensembles $A \subset X$, on note ${}^cA := X \setminus A$; on note pour $r > 0$:

$$B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < r\},$$
$$S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = r\}.$$

(o) Faire un dessin pour $M\#N$ lorsque $n = 2$.

(i) Montrer que l'on peut choisir des cartes (U,φ), (V,ψ) comme ci-dessus et que l'on a bien défini un atlas sur $M\#N$.

(ii) Montrer que le type de difféomorphisme de $M\#N$ ne dépend pas du choix des points p, q, ni du choix de cartes (U,φ), (V,ψ). [1]

(iii) Calculer la caractéristique d'Euler $\chi(M\#N)$ en fonction des caractéristiques d'Euler $\chi(M)$ et $\chi(N)$, que l'on supposera finies.

(iv) Montrer que $M\#N$ est orientable si et seulement si M et N sont orientables.

Exercice 3. On identifie $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ via $(x,y) \mapsto x + iy$ et on note $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ l'isomorphisme linéaire $(x,y) \mapsto (-y,x)$ qui correspond à la multiplication par i. Soit $L^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ une sous-variété de dimension n sans bord *totalement réelle*, c'est-à-dire telle que

$$JT_xL \cap T_xL = \{0\}, \qquad x \in L.$$

(i) Montrer que l'on a un isomorphisme de fibrés $\nu_{\mathbb{R}^{2n}}L \simeq TL$. Ici $\nu_{\mathbb{R}^{2n}}L$ est le fibré normal à L dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(ii) Supposons que L est compacte orientable. Montrer que dans ce cas la caractéristique d'Euler de L est nécessairement nulle.

(iii) Quelles sont les surfaces compactes orientables sans bord qui admettent des plongements totalement réels dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4. Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels positifs et considérons

$$f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}, \qquad [z_0 : \ldots : z_n] \mapsto \frac{\sum_{j=0}^n a_j |z_j|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2}.$$

Montrer que f est une fonction de Morse et calculer les indices de Morse de ses points critiques. Utiliser cette information pour montrer que la cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ est de rang 1 en degrés pairs compris entre 0 et $2n$, et nulle dans les autres degrés.

Exercice 5. Une variété compacte de dimension $n \geq 1$ peut être immergée dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 6. Soit ε^1 le fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$ et $\nu := \nu_{\mathbb{R}P^{n+1}}\mathbb{R}P^n$ le fibré normal à $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{R}P^{n+1}$. Montrer que

$$\varepsilon^1 \oplus T\mathbb{R}P^n \simeq \underbrace{\nu \oplus \cdots \oplus \nu}_{n+1 \text{ fois}}.$$

Est-ce que ν est trivial ? Est-ce que $T\mathbb{R}P^2$ et $T\mathbb{R}P^3$ sont triviaux ? Est-ce que $T\mathbb{R}P^2$ peut être scindé comme somme directe de deux fibrés en droites ?

---

1. Erratum : Si M et N sont orientables, il faut supposer que les cartes préservent des orientations choisies *a priori* sur M et N.