COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

EXAMEN BLANC

ALEXANDRU OANCEA

Ce devoir est à rendre le mardi 8 octobre au plus tard. Je vous le rendrai corrigé le lundi 14 octobre. La durée de l'examen sera de 4 heures. Toutefois, je vous encourage à travailler le devoir pendant le temps nécessaire pour atteindre tous les exercices. Pour m'aider à mieux ajuster le sujet de l'examen final, je vous demanderais de m'indiquer sur le devoir quelles parties vous avez réussi à traiter en 4h.

Les notes de cours sont autorisées, et même conseillées. La clarté des explications sera appréciée.

Exercice 1. (i) Calculer le degré de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

(ii) Généraliser ce résultat à une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ propre et lisse quelconque.

Exercice 2. Soit M^n une variété de dimension n et $(X_1, \dots, X_n)$ un repère local de TM au voisinage d'un point $p \in M$. Montrer qu'il existe une carte $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ autour de p telle que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ si et seulement si $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Exercice 3. Soit M une variété. Montrer que le fibré tangent TM est une variété orientable.

Exercice 4. Montrer que le fibré normal à $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^2$ est non-trivial.

Exercice 5.

(i) Soit V un espace vectoriel de dimension n. Montrer que tout élément non-nul $\omega \in \Lambda^n V^*$ définit un isomorphisme

$$V \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-1} V^*, \qquad v \longmapsto \iota_v \omega := \omega(v, \cdot, \dots, \cdot).$$

Date: 4 Octobre 2013.

(ii) Soit M une variété compacte sans bord. Soit X_t, $t \in [0,1]$ un champ de vecteurs sur M qui dépend de façon lisse de la variable temporelle t. On définit $\phi_t : M \to M$ par la relation
$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_t(\phi_t(p)),\ \phi_0(p) = p,\ p \in M.$$
Montrer que ϕ_t est bien défini et que $\phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$.

Étant donné un chemin de k-formes $\alpha_t \in \Omega^k(M)$, $t \in [0,1]$, démontrer la relation
$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t).$$

(iii) Supposons maintenant M compacte sans bord et orientable. Soient ω_0, ω_1 deux formes volume cohomologues. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ϕ tel que
$$\phi^*\omega_1 = \omega_0.$$

L'on pourra considérer $\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, justifier que c'est une forme volume, et chercher un chemin de difféomorphismes ϕ_t tel que
$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0.$$

Exercice 6. (i) Soit M une variété de dimension n et g une métrique riemannienne sur M. Nous définissons *le fibré unitaire en sphères*
$$STM := \{(p,v) \in TM\ :\ \|v\| = 1\} \subset TM.$$
Montrer que STM est une variété de dimension $2n-1$.

(ii) On définit *le projectivisé du fibré tangent* $\mathbb{P}TM$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments $(p,v) \in TM \setminus 0_M$ par la relation d'équivalence
$$(p,v) \sim (q,w) \quad \text{ssi} \quad p = q \text{ et } v \text{ est colinéaire à } w.$$
Ici 0_M désigne la section nulle de TM. Montrer que $\mathbb{P}TM$ est une variété. Montrer qu'il existe une application canonique $STM \to \mathbb{P}TM$ qui est un revêtement d'ordre 2.

(iii) Étudier l'orientabilité de la variété $\mathbb{P}TM$.

(iv) Soit $\pi : \mathbb{P}TM \to M$ la projection. Montrer que π est une submersion dont les fibres sont difféomorphes à $\mathbb{R}P^{n-1}$. Montrer que π^*TM s'écrit comme somme directe d'une fibré en droites et d'un fibré de rang $n-1$. *[L'on appelle ce phénomène "principe de scindement".]*