CORRIGÉ PARTIEL

COURS M2 "GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLES" 2013-2014

EXAMEN BLANC

ALEXANDRU OANCEA

Ce devoir est à rendre le mardi 8 octobre au plus tard. Je vous le rendrai corrigé le lundi 14 octobre. La durée de l'examen sera de 4 heures. Toutefois, je vous encourage à travailler le devoir pendant le temps nécessaire pour atteindre tous les exercices. Pour m'aider à mieux ajuster le sujet de l'examen final, je vous demanderais de m'indiquer sur le devoir quelles parties vous avez réussi à traiter en 4h.

Les notes de cours sont autorisées, et même conseillées. La clarté des explications sera appréciée.

Exercice 1. (i) Calculer le degré de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

(ii) Généraliser ce résultat à une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ propre et lisse quelconque.

Exercice 2. Soit M^n une variété de dimension n et $(X_1, \ldots, X_n)$ un repère local de TM au voisinage d'un point $p \in M$. Montrer qu'il existe une carte $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ autour de p telle que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ si et seulement si $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Exercice 3. Soit M une variété. Montrer que le fibré tangent TM est une variété orientable.

Exercice 4. Montrer que le fibré normal à $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^2$ est non-trivial.

Exercice 5.

(i) Soit V un espace vectoriel de dimension n. Montrer que tout élément non-nul $\omega \in \Lambda^n V^*$ définit un isomorphisme

$$V \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-1} V^*, \qquad v \longmapsto \iota_v \omega := \omega(v, \cdot, \ldots, \cdot).$$

Date: 4 Octobre 2013.

(ii) Soit M une variété compacte sans bord. Soit X_t, $t \in [0,1]$ un champ de vecteurs sur M qui dépend de façon lisse de la variable temporelle t. On définit $\phi_t : M \to M$ par la relation

$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_t(\phi_t(p)),\ p \in M.$$

Montrer que ϕ_t est bien défini et que $\phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$.

Étant donné un chemin de k-formes $\alpha_t \in \Omega^k(M)$, $t \in [0,1]$, démontrer la relation

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t).$$

(iii) Supposons maintenant M compacte sans bord et orientable. Soient ω_0, ω_1 deux formes volume cohomologues. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ϕ tel que

$$\phi^*\omega_1 = \omega_0.$$

L'on pourra considérer $\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, justifier que c'est une forme volume, et chercher un chemin de difféomorphismes ϕ_t tel que

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0.$$

Exercice 6. (i) Soit M une variété de dimension n et g une métrique riemannienne sur M. Nous définissons *le fibré unitaire en sphères*

$$STM := \{(p,v) \in TM\ :\ \|v\| = 1\} \subset TM.$$

Montrer que STM est une variété de dimension $2n-1$.

(ii) On définit *le projectivisé du fibré tangent* $\mathbb{P}TM$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments $(p,v) \in TM \setminus 0_M$ par la relation d'équivalence

$$(p,v) \sim (q,w) \quad \text{ssi} \quad p = q \text{ et } v \text{ est colinéaire à } w.$$

Ici 0_M désigne la section nulle de TM. Montrer que $\mathbb{P}TM$ est une variété. Montrer qu'il existe une application canonique $STM \to \mathbb{P}TM$ qui est un revêtement d'ordre 2.

(iii) Étudier l'orientabilité de la variété $\mathbb{P}TM$.

(iv) Soit $\pi : \mathbb{P}TM \to M$ la projection. Montrer que π est une submersion dont les fibres sont difféomorphes à $\mathbb{R}P^{n-1}$. Montrer que π^*TM s'écrit comme somme directe d'une fibré en droites et d'un fibré de rang $n-1$. *[L'on appelle ce phénomène "principe de scindement".]*

14/10/2013

Examen blanc "Géométrie & topologie différentielles"

2013 – 2014

(A. Oancea)

Corrigé partiel

Exercice 1 (ii) f propre $\Longrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$

Cas 1 : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, alors f minorée, non-surj.

donc $\boxed{\deg f = 0}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$: $\boxed{\deg f = 0}$ (f majorée).

Cas 2 : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $(*)$

Soit $y \in \mathbb{R}$ valeur régulière (Sard) et $x_1 < \ldots < x_p$ les pré-images de y (nombre fini par propreté).

Alors $\deg f = \sum_{i=1}^{p} \text{signe}\,(f'(x_i))$

Observation #1 Pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $f'(x_i)$ et $f'(x_{i+1})$ ont des signes différents (sinon par le thm val. intermédiaires il existe une autre pré-image de y dans $]x_i, x_{i+1}[$).

Observation #2 Pour avoir $(*)$ il faut $f'(x_1) > 0$ et $f'(x_p) > 0$.

Ces deux observations forcent p à être impair

et $\boxed{\deg f = +1.}$

Cas 2' : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Alors $\boxed{\deg(f)} = -\deg(-f) = \boxed{-1}$ par le Cas 2

$\boxed{////}$

Exercice 2

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $\varphi^t_{X_i}$ les flots locaux des champs de vecteurs X_i.

Alors $[X_i, X_j] = 0 \underset{\text{(cf. cours)}}{\Longrightarrow} \varphi^s_{X_j} \varphi^t_{X_i} = \varphi^t_{X_i} \varphi^s_{X_j}$, $\forall s, t$. $(*)$

L'application $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{\Phi} M$ définie sur un petit

voisinage $\mathcal{U} \ni 0$ par

$$(t_1, \dots, t_n) \longmapsto \varphi^{t_1}_{X_1} \circ \dots \circ \varphi^{t_n}_{X_n}(p)$$

est lisse et vérifie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(t) := d\Phi(t) \cdot e_i = \frac{d}{dt_i} \varphi^{t_1}_{X_1} \cdots \varphi^{t_n}_{X_n}(p)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{d}{dt_i} \varphi^{t_i}_{X_i} \varphi^{t_1}_{X_1} \cdots \widehat{\varphi^{t_i}_{X_i}} \cdots \varphi^{t_n}_{X_n}(p)$$

$$= X_i(\Phi(t))$$

C'est en particulier un difféo. local et Φ^{-1} est le système de coordonnées recherché.

$\boxed{\text{Pa}}$

Exercice 3 :

Solution #1 : Prendre atlas quelconque $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ sur M et considérer l'atlas $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), d\varphi_\alpha)\}$ sur TM avec $TM \xrightarrow{\pi} M$. Montrer que les applications de changement de carte préservent l'orientation de $\mathbb{R}^{2n}$.

Solution #2 : Le choix d'une métrique riemannienne g établit un isomorphisme de fibrés $TM \simeq T^*M$

$$(p, v) \longmapsto (p, g_p(v, \cdot))$$

qui est en particulier un difféomorphisme.

Il suffit donc de montrer que T^*M est une variété orientable. Mais nous avons vu que T^*M admet une forme symplectique ω. La non-dégénérescence de ω équivaut à la non-annulation de $\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ fois}}$ avec $\dim M = n$.

Donc $\omega^{\wedge n}$ est une forme de degré maximal sur T^*M, partout non-nulle. C'est l'une des définitions de l'orientabilité. $\boxed{///}$

Exercice 4. Soit $i : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ l'inclusion
$$[x:y] \longmapsto [x:y:0].$$

Par définition l'on a une suite exacte de fibrés
$$0 \longrightarrow T\mathbb{R}P^1 \longrightarrow \underset{= T\mathbb{R}P^2|_{\mathbb{R}P^1}}{i^*T\mathbb{R}P^2} \longrightarrow \nu_{\mathbb{R}P^2}\mathbb{R}P^1 \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathbb{R}P^1 \underset{\text{difféo.}}{\simeq} S^1$, $T\mathbb{R}P^1$ est trivial

(par exemple, en regardant $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, une trivialisation de TS^1 est $S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow TS^1$
$$(t,\lambda) \longmapsto \left(t, \lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big)$$

Si $\nu_{\mathbb{R}P^2}\mathbb{R}P^1$ était trivial, on déduirait que
$$i^*T\mathbb{R}P^2 \text{ serait trivial.}$$

(toute suite exacte de fibrés est scindée : pour $0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} G \to 0$ il suffit de mettre un produit scalaire sur F (partition de 1 sur la base) pour voir que $p|_{i(E)^\perp} : i(E)^\perp \xrightarrow{\sim} G$ iso., dont l'inverse fournit un scindement).

Regardons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S^2 \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{R}P^2 & \end{tikzcd}$$

$\begin{cases} S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ a(x,y,z) = (-x,-y,-z) \end{cases}$
antipodale.

$S^1 = \{(x,y,0)\} \subseteq S^2$

qui implique

$$\begin{tikzcd} TS^2|_{S^1} \arrow[rr, "da"] \arrow[dr, "d\pi"'] & & TS^2|_{S^1} \arrow[dl, "d\pi"] \\ & T\mathbb{R}P^2|_{\mathbb{R}P^1} & \end{tikzcd}$$

Si $T\mathbb{R}P^2|_{\mathbb{R}P^1}$ était orientable, puisque $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ revêtement on induirait une orientation sur $TS^2|_{S^1}$ en demandant que $d\pi$ préserve l'orientation. Puisque $TS^2|_{S^1}$ n'admet que deux ori. possibles (S^1 connexe), quitte à changer l'orientation de $T\mathbb{R}P^2|_{\mathbb{R}P^1}$ on peut supposer que l'orientation induite sur $TS^2|_{S^1}$ coïncide avec l'orientation de TS^2 comme bord de la boule B^3.

Or l'antipodale renverse cette dernière orientation.

Ceci fournit une contradiction :

$$\underbrace{\underbrace{d\pi(x,y,z)}_{\substack{\text{préserve}\\ \text{ori.}}} = \underbrace{d\pi(-x,-y,-z)}_{\substack{\text{préserve}\\ \text{ori.}}} \circ \underbrace{da(x,y,z)}_{\substack{\text{renverse}\\ \text{ori.}}}}_{\substack{\text{renverse}\\ \text{ori.}}}$$

$\boxed{///}$

<u>Solution alternative</u> (esquisse) : utiliser le thm. voisinage tubulaire et la classification des fibrés de rang 1 sur $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1$. Cette dernière implique :

$$\begin{array}{l} E \\ \downarrow \\ S^1 \end{array} \text{ rang 1 orientable ssi } E \setminus 0_{S^1} \text{ a deux composantes connexes.}$$

Montrer que $\mathbb{R}P^1 \subseteq \mathbb{R}P^2$ admet un voisinage $\mathcal{V}$ connexe t.q. $\mathcal{V} \setminus \mathbb{R}P^1$ est connexe, en utilisant directement la description de $\mathbb{R}P^2$ comme quotient de $\mathbb{R}^2$.

Solution alternative (esquisse) :

Montrer que $\nu_{\mathbb{R}P^2}\mathbb{R}P^1 \simeq$ fibré tautologique sur $\mathbb{R}P^1$.

Écrire explicitement deux trivialisations de ce dernier, sur deux intervalles I, J t.q. $I \cap J = 2$ intervalles I_1, I_2

Calculer les f^t transition et montrer qu'elles portent des signes différents sur I_1 et I_2.

Conclure à la non-orientabilité du fibré tautologique, et donc de $\nu_{\mathbb{R}P^2}\mathbb{R}P^1$.

$\blacksquare$

Exercice 5 :

(ii) On note $\phi_t : M \longrightarrow M$ l'application définie par

$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_t(\phi_t(p)) \quad \underline{\text{et } \phi(p) = p}$$

(ommission dans le sujet)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Je montre que, pour toute forme } \alpha \text{, l'on a} \\ \dfrac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_t}\alpha\end{array}} \quad (*)$$

ATTENTION : Puisque le champ de vecteurs dépend du temps, il n'est pas vrai que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$!! [Erreur récurrente dans de nombreuses copies]

[Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, prenons un ch $\vec{v}$ qui définit une rotation

$$X(x,y) := (-y, x)$$

et transformons-le en un champ de $\vec{v}$ qui dépend du temps en l'accélérant par une fct. dépendante du temps

$$X_t(x,y) := \rho(t)\cdot(-y,x)$$

avec $\rho : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, $\rho(0)=1$.]

Alors $\phi_{t+s} \neq \phi_t \circ \phi_s$. (sauf pour des valeurs spéciales de t et s)

Remarque : (*) entraîne bien-sûr $\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t)$.

Par analogie avec la preuve de (*) lorsque X ne dépend pas du temps, il est utile de construire une famille d'applications/flots qui se comporte bien par composition.

Heuristique : Définissons $s \longmapsto \varphi_s^t(p)$ comme étant l'unique courbe intégrale de X_t passant par p au temps t. Plus précisément :

$$\boxed{\frac{d}{ds}\varphi_s^t(p) = X_s(\varphi_s^t(p)), \quad \varphi_t^t(p) = p} \quad (**)$$

En vue de la définition heuristique on s'attend à avoir

$$\boxed{\varphi_s^t \circ \varphi_t^\tau = \varphi_s^\tau}$$

et ceci découle aussi de (**) : les courbes $\gamma(s) = \varphi_s^t \circ \varphi_t^\tau(p)$ et $\delta(s) = \varphi_s^\tau(p)$ vérifient toutes les deux l'éq. différentielle

$$\dot\gamma(s) = X_s(\gamma(s)), \quad \dot\delta(s) = X_s(\delta(s))$$

$$\text{et } \gamma(t) = \delta(t) = \varphi_t^\tau(p).$$

Rmq : Ceci montre en particulier que $\phi_t = \varphi_t^0$ difféo : son inverse est φ_0^t !

Calcul : $$\frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0}\phi_s^*\alpha = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(\varphi_{s_0+\varepsilon}^0)^*\alpha$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(\varphi_{s_0+\varepsilon}^{s_0}\circ\varphi_{s_0}^0)^*\alpha$$

$$= (\varphi^{0}_{s_0})^* \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon})^* \alpha$$

$$= \phi_{s_0}^* \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon})^* \alpha$$

Il suffit donc de montrer que

$$\boxed{\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon})^* \alpha = \mathcal{L}_{X_{s_0}} \alpha} \qquad (***)$$

- en tant que fonctions de α, les deux termes de cette égalité sont des dérivations (de degré 0), qui commutent avec d et qui sont identiques sur $C^\infty(M)$:

$$\mathcal{L}_{X_{s_0}} f = i_{X_{s_0}} df = df \cdot X_{s_0}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon})^* f = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(\varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon}) = df \cdot \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varphi^{s_0}_{s_0+\varepsilon}$$

$$= df \cdot X_{s_0}$$

Par un Exercice vu en feuilles d'exercices No. 3, on déduit $(***)$

M

Exercice 6 :

(i) Pour montrer que STM ss. var. dim. $2n-1$, suffit de m. q. 1 est val. régulière de la fonction

$$f : TM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(p,v) := g_p(v,v)$$

Alors qu'il n'est pas possible d'écrire simplement l'expression de la différentielle de f sans poser en coordonnées, il est facile d'exhiber un vecteur $\xi \in T_{(p,v)}TM$ t.q. $df(p,v)\cdot\xi \neq 0$

L'idée est que f croît strictement dans la direction de v.

Posons $\xi := v \in T_pM \quad \ker d\pi \subseteq T_{(p,v)}TM$.

Une courbe intégrale pour ξ est $t \longmapsto v + tv$ (passant par (p,v))

et $df(p,v)\cdot\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p,(1+t)v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_p((1+t)v,(1+t)v)$

$$= 2\,g_p(v,v) \qquad 2 \neq 0 \qquad \boxed{\mathrm{M}}$$

(iv) Soit $\pi : \mathbb{P}TM \longrightarrow M$.

Définissons $L := \{ (p,[v],w) : w \in [v]$ $\quad \subseteq \pi^*TM$.

$(p,[v]) \in \mathbb{P}TM,\ p \in M,\ [v]$ dte dans $T_pM \}$

(la restriction de L à chaque fibre $\mathbb{P}(T_pM)$ est le fibré tautologique)

• L fibré (de rang 1) : si $\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\sim]{\Phi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{RP}^{n-1}$ applications de trivialisation pour $\mathbb{P}TM$, avec

$$\left(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}\right)(x,[v]) = \left(x, \Phi_{\alpha\beta}(x)[v]\right)$$

$$\text{où } \Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow PGL(n,\mathbb{R})$$

alors $L|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = (pr_2 \circ \Phi_\alpha)^*$ (fibré tautologique)

Ainsi $\mathbb{P}TM$ est recouvert par des ouverts $\pi^{-1}(U_\alpha)$ t.q. $L|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ fibré localement trivial de rang 1

$\Longrightarrow$ L est un fibré localement trivial de rang 1.

• l'inclusion $L \hookrightarrow \pi^* TM$ morphisme injectif de fibrés.

• pour trouver un supplémentaire il suffit de choisir un produit scalaire sur $\pi^* TM$. Alors

$$\pi^* TM = L \oplus L^\perp .$$

$\boxed{M}$