Cours #11 : Théorie de Morse II. Dualité de Poincaré. Classes de Thom/Euler.

Partie 1 : Théorie de Morse. $e(M) = \chi(H^*(M))$. Mayer-Vietoris.

[ÉNONCER $e(M) = \chi(H^*(M))$ COMME FIL DIRECTEUR.

Déf : $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fct. Morse ssi $\forall p \in M$, $df(p) = 0 \Rightarrow H_f(p)$ non-dég.

$\text{index}(p) \overset{\text{not.}}{=} \text{ind}(p; f)$ dim. maximale d'un sous-espace de T_pM sur lequel $H_f(p) < 0$.

Prop : Une fct. C^2 générique est de Morse ($df \pitchfork 0_M \subset T^*M$)

Prop (Lemme de Morse) : Autour d'un pt. critique p il existe un syst. de coordonnées $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, $\varphi(p) = 0$ t.q.

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

et $\lambda = \text{ind}(p; f)$.

Preuve : On choisit des coords. (U, φ), $\varphi(p) = 0$.

Alors $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i$, $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ si p critique

$$= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(x) x_i x_j, \quad \underbrace{f_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)}_{\text{forme quadratique sym. non-dég.}}$$

Le pivot de Gauss "à paramètre" fournit le chang. coords. désiré. $\boxed{\checkmark}$

Conséquence : Si f fct. Morse, p pt. critique $\text{ind}(p; \nabla f) = (-1)^{\text{ind}(p; f)}$

En particulier :

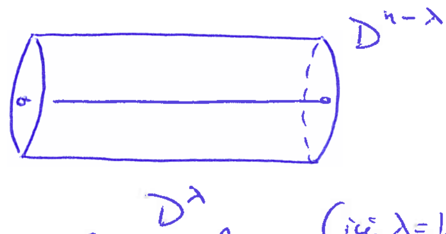
$$e(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (\#\,\text{pts. critiques indice } k) .$$

<u>Théorème</u> : Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>fct. Morse</u> propre, $c \in \mathbb{R}$ val. critique t.q. $f^{-1}(c)$ contienne un unique pt. critique p d'indice λ. [et $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]\setminus\{c\}$ val. rég.].

Pour $\varepsilon > 0$ petit, $f^{-1}(c+\varepsilon) \underset{\text{à type d'homotopie}}{\simeq} f^{-1}(c-\varepsilon) \sqcup H_\lambda$

└ anse d'indice λ.

<u>Explications</u> : $H_\lambda = \underset{\text{âme}}{D^\lambda} \times \underset{\text{co-âme}}{D^{n-\lambda}}$



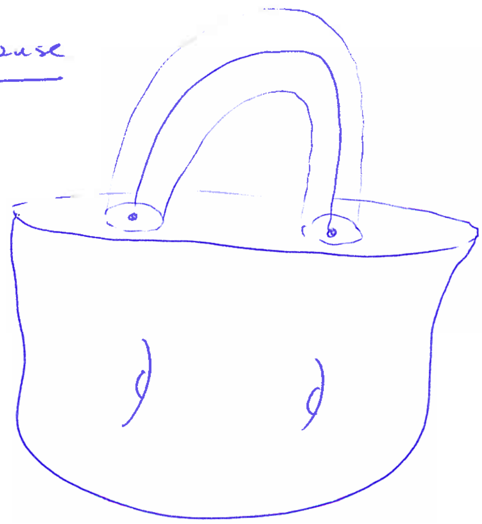
(ici $\lambda = 1, n = 3$)

Soit $S^{\lambda-1} \subset f^{-1}(c-\varepsilon)$ sphère à fibré normal trivial.

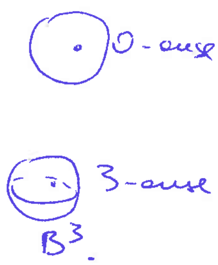
On identifie $\nu(S^{\lambda-1}) \simeq S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ et on note

$$\{f \leq c-\varepsilon\} \underset{S^{\lambda-1}}{\sqcup} H_\lambda := \{f \leq c-\varepsilon\} \sqcup H_\lambda \Big/ \text{identif. } S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$$

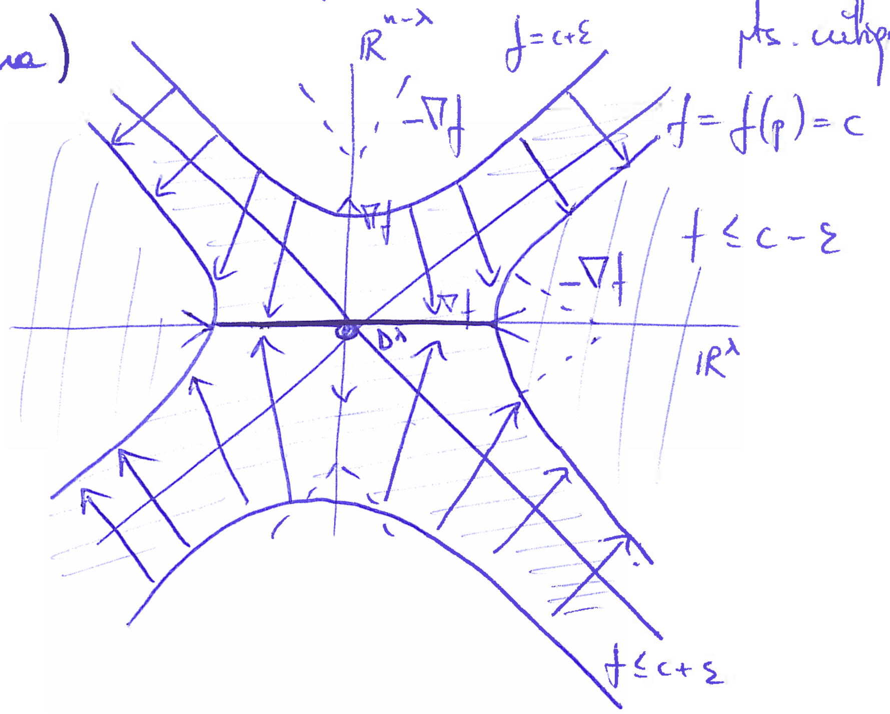
<u>1-anse</u>



<u>2-anse.</u>



Preuve du théorème : cf. lemme Morse. Fixe métrique standard près des pts. critiques.
(schéma)



$\blacksquare$

Conséquence : $M = \left(\bigcup \text{0-anses}\right) \cup \left(\bigcup \text{1-anses}\right) \cup (\text{2-anses}) \ldots$
(boules) connecte boules entre elles

"décomposition cellulaire".

Si M cpte, nbre fini de cellules !

DÉFINITION : Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un espace vectoriel gradué $\chi(V^\bullet) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \dim V^k$

THM: (M cpte fermée orientée)

$$e(M) = \chi(H^\bullet(M))$$

nombre d'Euler — caractéristique d'Euler

i.e. $\displaystyle\sum_{p\in\mathrm{Crit}(f)} (-1)^{\mathrm{ind}(p;f)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M)$.

La preuve utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris.

DIGRESSION : Outils pour calculer la cohomologie (de de Rham)

0) Invariance par homotopie.

1) $H^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & * = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, puisque $\mathbb{R}^n \underset{h.e.}{\simeq} pt.$

"Lemme de Poincaré"

2) Suite exacte de Mayer-Vietoris

M variété, U, V ouverts, $M = U \cup V$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, hook, "j_U"] & \\
U \cap V \arrow[ur, hook, "i_U"] \arrow[dr, hook, "i_V"'] & & M \\
 & V \arrow[ur, hook, "j_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Il existe une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{(j_U^*, j_V^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{i_V^* - i_U^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Preuve : On utilise le lemme homologique suivant :

Lemme : $0 \to A^{\cdot} \xrightarrow{f} B^{\cdot} \xrightarrow{g} C^{\cdot} \to 0$ suite exacte de cplxes.

induit s. ex. longue

$$\cdots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{f^*} H^k(B) \xrightarrow{g^*} H^k(C) \xrightarrow{d} H^{k+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

avec $d[c_k]_C := [a_{k+1}]_A$, où $f(a_{k+1}) = d_B(b_k)$ et $g(b_k) = c_k$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{k+2} \arrow[r] & B^{k+2} \arrow[r] & C^{k+2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{k+1} \arrow[r] \arrow[u, "a_k"'] & B^{k+1} \arrow[r] \arrow[u, "d_B(b_k)"'] & C^{k+1} \arrow[r] \arrow[u, "0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{k} \arrow[r, "f"] \arrow[u] & B^{k} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "b_k"'] & C^{k} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans notre cas :

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(j_U^*, j_V^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i_V^* - i_U^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

suite exacte de cplxes.

En effet : $i_V^* - i_U^*$ surjective : soit $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$

Alors, si $\{\varphi, \psi\}$ partition 1 subordonnée au recouvr. $\{U, V\}$,

$$\operatorname{supp} \varphi \subseteq U, \quad \operatorname{supp} \psi \subseteq V$$

on a $\varphi \omega \in \Omega^k(V)$, $\psi \omega \in \Omega^k(U)$

et $(i_V^* - i_U^*)(-\psi\omega, \varphi\omega) = \omega$

$\boxed{M}$

Application : (exercice) $H^*(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & * = 0, n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, $n \geq 1$.

— FIN DIGRESSION —

Définition : $V^\cdot$ e.v. gradué. La caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(V^\cdot) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim V^k$$

Lemme : Soit $\cdots \longrightarrow V_1^k \longrightarrow V_2^k \longrightarrow V_3^k \longrightarrow V_1^{k+1} \longrightarrow \cdots$

s. exacte e.v. gradués V_1, V_2, V_3.

- si V_2, V_3 dim finie, alors V_1 dim. finie (+ perm. cycliques)
- dans ce cas, $\chi(V_1) - \chi(V_2) + \chi(V_3) = 0$.

$\boxed{M}$

Preuve du thm :

Soit f fct. Morse, avec unique pt. crit. par niveau critique.

Pour chaque niveau critique c on a

$$M^{c+\varepsilon} \underset{h.e.}{\simeq} M^{c-\varepsilon} \sqcup H_\lambda \ , \quad \lambda = \text{indice pt. critique.}$$

Par récurrence : $H^{\cdot}(M^{c+\varepsilon})$ dim. finie : avec Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(M^{c+\varepsilon}) \arrow[rr] & & H^{\cdot}(M^{c-\varepsilon}) \oplus H^{\cdot}(H_\lambda) \arrow[dl] \\ & H^{\cdot}(M^{c-\varepsilon} \cap H_\lambda) \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

$$M^{c-\varepsilon} \cap H_\lambda \simeq S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$$

$$\begin{aligned} \chi(M^{c+\varepsilon}) &= \chi(M^{c-\varepsilon}) + 1 - \chi(S^{\lambda-1}) \\ &= \chi(M^{c-\varepsilon}) + 1 - (1 + (-1)^{\lambda-1}) \\ &= \chi(M^{c-\varepsilon}) + (-1)^{\lambda} . \end{aligned}$$

$\blacksquare$

 (cf. Bott-Tu)

2ème partie : Dualité de Poincaré. Classe de Thom. Classe d'Euler.

Définition : (recouvr. ouvert à intersections contractiles) : $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ recouvr. ouvert t.q. $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k$, $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \underset{\text{diffeo}}{\simeq} \mathbb{R}^n$

Fait : Toute variété admet une tel recouvrement. Fini si cpcte ou fibré vectoriel à base cpcte. (vois. géodésiquement convexes)

Théorème (dualité de Poincaré) Si M orientable admet recouvr. à int. contractiles fini, alors

$$\int : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$([\omega], [\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

forme bilin. non-dégénérée. En particulier $H^k(M) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(M)^\vee$.

Rmq : Par Mayer-Vietoris, les 2 gpes sont de dim. finie.

Preuve : 1) $H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & * = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ (Lemme Poincaré à supp cpct)

2) S.e. Mayer-Vietoris à supp. cpct.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, hook, "j_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, hook, "i_U"] \arrow[dr, hook, "i_V"'] & & M \\ & V \arrow[ur, hook, "j_V"'] & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(i_{U*}, i_{V*})} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{U*} - j_{V*}} \Omega_c^*(M) \longrightarrow 0$$

$$\rightsquigarrow \dots \to H_c^k(U \cap V) \longrightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \longrightarrow H_c^k(M) \longrightarrow H_c^{k+1}(U \cap V) \to \dots$$

3) L'appariement induit diag. comm + récurrence & lemme des 5.

$$\begin{tikzcd} H^k(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k+1}(U \cup V) \arrow[d] \\ H_c^{n-k}(U \cup V)^\vee \arrow[r] & H_c^{n-k}(U)^\vee \oplus H_c^{n-k}(V)^\vee \arrow[r] & H_c^{n-k}(U \cap V) \arrow[r] & H_c^{n-k-1}(U \cup V)^\vee \end{tikzcd}$$

∎

<u>Corollaire</u> : (Isomorphisme de Thom)

$E \longrightarrow M$ fibré orientable rang r sur base cpcte orientable dim. n

Alors $H^k_c(E) \simeq H^{k-r}(M)$

<u>Preuve</u> : $H^k_c(E) \simeq H^{n+r-k}(E)^\vee$ dualité dans E

$\simeq H^{n+r-k}(M)^\vee$ homotopie

$\simeq H^{k-r}(M)$ dualité dans M. $\blacksquare$

<u>Digression</u> : L'isomorphisme de Thom est donné par le morphisme d'intégration dans la fibre (<u>preuve</u> : idem dualité Poincaré, avec π_* + Lemme Poincaré)

$$\pi_* : H^k_c(E) \longrightarrow H^{k-r}(M)$$

$$\pi_*(\pi^*\phi \cdot f(x,t)\, dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_s}) = 0 \,, \quad s < r$$

$$\pi_*(\pi^*\phi \cdot f(x,t)\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r) = \phi \cdot \int_{\mathbb{R}^r} f(x,t)\, dt$$

où $t_1, \dots, t_r$ coord. sur fibre provenant d'un atlas orienté.

<u>Propriétés</u> : • $\pi_* d = d\, \pi_*$

• $\pi_*(\pi^*\omega \wedge \eta) = \omega \wedge \pi_* \eta$

<u>Définition</u> : <u>La classe de Thom</u> $\Phi \in H^r_c(E)$ est l'unique classe t.q. $\pi_* \Phi = 1 \in H^0(M)$.

<u>Conséquence :</u> Puisque $\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*\Phi = \omega$, il s'ensuit que l'<u>isomorphisme de Thom inverse</u> est

$$\begin{aligned} H^k(M) &\xrightarrow{\ \sim\ } H_c^{k+r}(E) \\ \omega &\longmapsto \pi^*\omega \wedge \Phi . \end{aligned}$$

<u>Rmq</u> : La classe de Thom est l'unique classe dont la restr. à la fibre est la forme de volume 1.

<u>Définition</u> : (<u>dual de Poincaré</u>) Soit $S^k \overset{i}{\subseteq} M^n$ ss.var. cpcte fermée orientée. On a un morphisme d'intégration

$$\begin{aligned} H^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \int_S i^*\omega \end{aligned}$$

Celui-ci est représenté par une unique $\eta_S \in H_c^{n-k}(M)$. Son image dans $H^{n-k}(M)$ par extension $j_*: H_c^{n-k}(M) \longrightarrow H^{n-k}(M)$ s'appelle "<u>dual de Poincaré</u>" de S. Cette classe est caractérisée par la relation

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S , \quad \forall \omega \in H^k_{(c)}(M).$$

Proposition (dual de Poincaré = classe de Thom).

Soit $S^k \subseteq M^n$, $\nu_M S$ fibré normal, $\mathcal{V}$ vois. tubulaire.

Alors $\quad \eta_S = j_* \Phi \,, \quad j_* : H_c^{n-k}(\nu_M S) \longrightarrow H^{n-k}(M)$

Preuve :
$$\int_M \omega \wedge j_* \Phi = \int_{\mathcal{V}} \omega \wedge \Phi$$
$$= \int_{\nu_M S} \pi^* i^* \omega \wedge \Phi$$
$$= \int_S i^* \omega \wedge \pi_* \Phi$$
$$= \int_S i^* \omega \qquad \blacksquare$$

COROLLAIRE : Soient $S \pitchfork T$.

Alors $\eta_{S \pitchfork T} = \eta_S \wedge \eta_T$.

Preuve : $\nu_{S \pitchfork T} = \nu_S \oplus \nu_T$

et $\Phi(\nu_S \oplus \nu_T) = \pi_1^* \Phi(\nu_S) \wedge \pi_2^* \Phi(\nu_T)$

(degré correct, supp cpct, intégrale 1 ds chaque fibre)

Ici : $\nu_S \xleftarrow{\pi_1} \nu_S \oplus \nu_T \xrightarrow{\pi_2} \nu_T \qquad \blacksquare$

Définition : (classe d'Euler) Soit $E \longrightarrow M$ fibré rg. r.

On définit $e(E) \in H^r(M)$ par $e(E) := \Phi|_{0_M}$.

ou encore : $\quad e(E) = i^* \eta_{0_M}$.

↳ dual de Poincaré de la section nulle dans $H^r(E) \simeq H^r(M)$.

(fonctorialité) $\qquad$ M, M' cycles

<u>Proposition</u> : Soit $f : M' \longrightarrow M$, $E \longrightarrow M$, $f^*E \to M'$.

Alors
$$\Phi(f^*E) = f^*\Phi(E).$$
$$e(f^*E) = f^*e(E) \quad \blacksquare$$

<u>Proposition</u> : Soit M cycle orientée. Alors
$$e(M) = \int_M e(TM).$$

<u>Preuve</u> :
$$\int_M e(TM) = \int_M i^*\Phi$$
$$= \int_{TM} \pi^* i^* \Phi \wedge \Phi$$
$$= \int_{TM} \Phi \wedge \Phi$$
$$= \int_{TM} \eta_{O_M} \wedge \eta_{s_{\llcorner \text{ section } \pitchfork O_M}}$$
$$= \int_{TM} \eta_{O_M \pitchfork s}$$
$$= \int_{O_M \pitchfork s} 1 = \# \text{ élém. avec signe de } O_M \pitchfork s. \quad \blacksquare$$