

Quelques rappels sur la différentiabilité.

1. Applications linéaires: Tous les es sont m \mathbb{R} .

a). Espaces vectoriels normés:

Th.: Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.
 Sinon, il existe des normes non équivalentes.

Preuve: Si E de dim finie, on fixe une base (e_1, \dots, e_n) .

On définit $\|\cdot\|_1$ sur E par $\|\sum x_i e_i\|_1 = \sum |x_i|$.

La sphère unité pour $\|\cdot\|_1$ est

$$S_{\|\cdot\|_1} = \left\{ \sum x_i e_i, |x_i| \leq 1 \forall i \text{ et } \exists j \mid |x_j| = 1 \right\}$$

$$= \bigcup_{j=1}^n S_{\|\cdot\|_1}^+ = \left\{ \sum x_i e_i \mid |x_j| = 1 \text{ et } |x_i| \leq 1 \forall i \neq j \right\}$$

alors par Bolzano-Weierstrass, $S_{\|\cdot\|_1}^+$ est séquentiellement compact,

donc $S_{\|\cdot\|_1}$ l'est aussi (pour la topologie induite par $\|\cdot\|_1$)

Soit alors N une norme quelconque sur E . Par inégalité triangulaire,

$$N\left(\sum x_i e_i\right) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq n \max_{1 \leq i \leq n} N(e_i) \cdot \max |x_i|$$

Donc $N \leq c \|\cdot\|_1$.

Par conséquent, N est continue pour la topologie induite par $\|\cdot\|_1$: si $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$, on a $N(x_n - x) \leq c \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$.

Comme $S_{\|\cdot\|_1}$ est $\|\cdot\|_1$ -compact, N atteint donc son minimum m sur $S_{\|\cdot\|_1}$. Comme N ne s'annule qu'en 0, ce minimum c est donc non nul. On a donc $N \geq c \|\cdot\|_1$.

Si alors $x \in E \setminus \{0\}$: $N\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \geq c$ donc $N(x) \geq c \|x\|_1$.

Pour $x=0$, cette inégalité reste vraie. On en déduit donc que $c \|x\|_1 \leq N \leq C \|x\|_1$ sur E donc que N et $\|\cdot\|_1$

sont équivalentes. Si N_1 et N_2 sont deux normes sur E , on a donc $N_1 \sim \|\cdot\|_1 \sim N_2$ donc $N_1 \sim N_2$.

(vérifier que \sim est une relation d'équivalence, donc transitive).

Exercice: Toutes les topologies définies par des normes sur des espaces de dimension finie. On appelle cette topologie la topologie d'eu de E .

Si E est de dim infinie, on considère une suite libre $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ dénombrable. Par le th d'Hahn-Banach, il existe des normes N_1 et N_2 sur E qui vérifient:

$$\rightarrow N_1(e_i) = 1$$

$$\rightarrow N_2(e_{2n}) = 2n, \quad N_2(e_{2n+1}) = \frac{1}{2n+1}$$

alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. □

Exemples: Sur l'espace des fonctions continues de $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ (den) on a $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$ qui ne sont pas équivalentes. $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach (complet) alors que le complet de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_1$ est l'espace $L^1([0,1], \mathbb{R})$. Ce ne sont pas les mêmes espaces.
En fait:

Prop: Si (E, N_1) et (E, N_2) sont des espaces de Banach, alors N_1 et N_2 sont équivalentes ou non comparables.

Preuve: Si $N_2 \leq c N_1$ alors $\text{id}: (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est continue. Elle est injective entre espaces de Banach, elle est donc ouverte (R de l'application ouverte cf analyse fonctionnelle). Donc $\text{id}(B_1)$ contient un voisinage ouvert de 0 pour N_2 donc contient εB_2 (la boule de taille ε autour de 0 pour N_2). Comme id est injective, on conclut que si $N_1(x) = 1$, on a $N_2(x) \geq \varepsilon$. De même que précédemment, on conclut que $N_2 \geq c N_1$. \square

6. Applications linéaires en dimension finie:

E, F en de dimension finie n, m . Alors:

Prop: Toute application linéaire $u: E \rightarrow F$ est continue, quelle que soit les normes choisies sur E et F . On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de ces applications linéaires.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de dimension finie, $n \cdot m$
- si $n = m$, les applications linéaires inversibles forment un ouvert dense de $\mathcal{L}(E, F)$.
- si $n < m$, les applications linéaires injectives forment un ouvert dense.
- si $n > m$, les applications linéaires injectives forment un ouvert dense.

Idée des preuves: On rappelle que u linéaire est continue si elle est bornée sur la boule unité.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on a

$$\|u(\sum x_i e_i)\|_F = \|\sum x_i u(e_i)\|_F \leq \sum |x_i| \|u(e_i)\|_F \leq C \|\sum x_i e_i\|_E$$

donc $u: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue. On conclut par l'équivalence de $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

• dimension en exhibant une base.

• On fixe pour E et F des bases (e_1, \dots, e_n) , (f_1, \dots, f_m) . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A := \text{mat}(u, E, F)$.

$\rightarrow u$ est bijective si $\det A \neq 0$ car $u \mapsto \det A$ est continue, l'ensemble des applications linéaires bijectives est un

ouvert.

→ De plus, soit u_0 l'AT définie par $u_0(e_i) = f_i$. On a $\text{Mat}(u - \varepsilon u_0, E, F) = A - \varepsilon \text{Id}$. Donc si $\varepsilon < 1$ n'est pas up de A (qui a 1 comme fci de vp), alors $u - \varepsilon u_0$ est inversible.

• Idem pour injectives injectives. \square

Def. Soit E et F et de evn, $\mathcal{L}(E, F)$ a une norme naturelle:
$$\|u\| := \max_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$$

On l'appelle norme subadditive et on se travaillera qu'avec ces normes. La top fondamentale de ces normes est la suivante:
si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$

Prop. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible, et $\varepsilon \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie

$\| \varepsilon \| < \| u^{-1} \|^{-1}$
alors $u + \varepsilon$ est inversible

Preuve: Soit $\exists x, \|x\|=1 / u(x) + \varepsilon x = 0$

Donc $x + u^{-1} \varepsilon x = 0$

Donc $\text{Id} + u^{-1} \varepsilon$ n'est pas inversible. ($E \rightarrow E$)

On $\|u^{-1} \varepsilon\| \leq \|u^{-1}\| \|\varepsilon\| < 1$, donc

$$(\text{Id} + u^{-1} \varepsilon)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (u^{-1} \varepsilon)^k \text{ existe. } \square$$

Prop. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E, F des EVN. Alors $u(B(0,1)) \subset B(0, \|u\|)$
et si u est inversible, $u(B(0,1)) \supset B(0, \|u^{-1}\|^{-1})$.

Preuve: si $\|y\| \leq \|u^{-1}\|^{-1}$, et $u(x) = y$, alors

$$x = u^{-1}(y) \text{ donc } \|x\| \leq \|u^{-1}\| \|y\| < 1. \quad \square$$

c). En dimension infinie:

→ la continuité d'1 AT dépend des normes sur les EV

→ Sur $\mathcal{L}(E, E)$, injectivité et surjectivité ne coïncident pas

→ Par contre, l'ensemble des applicat^{ns} linéaires inversibles ou injectives reste en ouvert. (continues)