Dérivations et champs de vecteurs

Soit $\Gamma^\infty(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Soit $\mathcal{D}^\infty(M)$ l'ensemble des dérivations sur M, c'est-à-dire des applications linéaires $\delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ qui vérifient la règle de Leibniz : $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$. Un champ de vecteur X définit une dérivation par $L_X(f)(p) = df(p)X$. Le but de cette page est de montrer :

Théorème 1 *L'application $L. : \Gamma^\infty(M) \to \mathcal{D}^\infty(M)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

L'injectivité est évidente : si $X \neq 0$, il existe une fonction f telle que $L_X(f)$ n'est pas identiquement nulle (exercice). On démontre ci-dessous la surjectivité.

1 Quelques lemmes

Lemme 2 *Si c est une constante, $\delta c = 0$.*

Preuve : $\delta c = c\delta(1) = c\delta(1 \cdot 1) = c(1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) = 2c\delta(1) = 2\delta(c)$. □

Lemme 3 *Soit δ une dérivation sur M. Si $f, \tilde{f}$ coincident sur un ouvert U, $\delta(f)$ et $\delta(\tilde{f})$ coincident aussi sur U.*

Preuve : Par linéarité des dérivations, il s'agit de voir que si $g \equiv 0$ sur U, $\delta g_{|U} \equiv 0$. Soit $x \in U$, $V \subset U$ une carte autour de x, et $\chi : M \to [0,1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans V qui vaut 1 en x. Alors puisque $g \equiv 0$ sur $U \supset V$, $g = (1-\chi)g$. Donc $\delta g(x) = \delta\big((1-\chi)g\big)(x) = (1-\chi)(x)\delta g(x) + g(x)\delta(1-\chi)(x) = 0$. Donc $\delta g \equiv 0$ sur U. □

Lemme 4 *Soit $f : B(1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On peut écrire*

$$f(x) = f(0) + \sum g_i(x)x_i,$$

où les x_i sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$, les g_i sont $\mathcal{C}^\infty$, et $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Preuve : On pose $g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$. Alors $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ et g_i est $\mathcal{C}^\infty$ (exercice). De plus,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))dt \\
&= f(0) + \int_0^1 f'(tx)xdt \\
&= f(0) + \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i dt \\
&= f(0) + \sum \left[\int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt\right] x_i = f(0) + \sum g_i(x)x_i. \square
\end{aligned}$$

Corollaire 5 *Une dérivation sur $B := B(1)$ est la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs de B.*

Preuve : Soit δ une dérivation sur B. On pose $\delta x_i := a_i(x)$, $\vec{X} = \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Pour $x_0 \in B$, on écrit $f(x) = f(x_0) + \sum g_i(x)(x_i - x_i^0)$ (lemme précédent). On a alors

$$\begin{aligned} \delta f(x) &= \delta(f(x_0)) + \sum \delta g_i(x)(x_i - x_i^0) + \sum g_i(x)\delta(x_i - x_i^0)(x) \\ &= \sum \delta g_i(x)(x_i - x_i^0) + \sum g_i(x)\delta x_i(x). \end{aligned}$$

En x_0, on obtient donc :

$$\delta f(x_0) = 0 + \sum g_i(x_0)a_i(x_0) = \sum a_i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)\vec{X} = L_{\vec{X}}f(x_0).\square$$

2 Preuve du théorème 1

Comme annoncé, on démontre ici la surjectivité. Soit δ une dérivation sur M, (U_i, φ_i) un atlas de M ($\varphi_i(U_i) = B$) tel que les $V_i := \frac{1}{2}U_i$ recouvrent M. On appelle $\mathcal{C}^\infty(\overline{V}_i)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur V_i qui se prolongent en des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Notons que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2}\overline{B})$, $f \circ \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V}_j)$ (le démontrer). Définissons : $\delta_j : \mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2}\overline{B}) \to \mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2}\overline{B})$ par

$$\delta_j f(x) := \delta f \circ \varphi_j(\varphi_j^{-1}(x))$$

D'après le lemme 3, $\delta_j(f)$ est bien défini car $\delta(f \circ \varphi_j)_{|V_j}$ ne dépend pas du prolongement de $f \circ \varphi_j$ à M. Alors δ_j est linéaire, et vérifie la règle de Leibniz :

$$\delta_j(fg)(x) = \delta(f\circ\varphi_j g\circ\varphi_j)(\varphi_j^{-1}(x)) = [f \circ \varphi_j \delta(g \circ \varphi_j) + g \circ \varphi_j \delta(f \circ \varphi_j)](\varphi_j(x)) = f\delta g + g\delta f(x).$$

D'après le corollaire 5, il existe un champ de vecteurs Y_j sur $\frac{1}{2}B$ tel que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\frac{1}{2}B})$, $\delta_j f = Y_j \cdot f$. Si à présent $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $g \circ \varphi_j^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2}\overline{B})$ et $\delta_j(f \circ \varphi_j^{-1})(x) = \delta f(\varphi_j^{-1}(x))$ par définition de δ_j. Donc

$$\begin{aligned} \delta g_{|V_j}(p) &= \delta_j(g \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) \\ &= dg \circ \varphi_j^{-1}(\varphi_j(p))Y_j(\varphi_j(p)) \\ &= dg(p) \circ d\varphi_j^{-1}(\varphi_j(p))Y_j(\varphi_j(p)) \\ &= dg(p)[\varphi_{j*}^{-1}Y_j(p)]. \end{aligned}$$

En posant $X_j := \varphi_{j*}^{-1}Y_j$, on obtient un champ de vecteur sur V_j et $(\delta g)_{|V_j} = L_{X_j}g$ $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. De plus, si $p \in V_i \cap V_j$, U un voisinage de p dans $V_i \cap V_j$, f une fonction sur M, on a $(\delta f)_{|U} = L_{X_i}f = L_{X_j}f$. Par injectivité de $X \mapsto L_X$, on obtient donc $X_i = X_j$ sur U, donc $X_i = X_j$ sur $V_i \cap V_j$. Le champ de vecteur $X(p) := X_i(p)$ si $p \in V_i$ est donc bien défini, et $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $p \in V_i$ on a $\delta f(p) = L_{X_i}f(p) = L_X f(p)$. Donc $\delta f = L_X f$. $\square$