Connexions, géodésiques et courbure des surfaces de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 : Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇ et $N \subset M$ une sous-variété. On souhaite définir une connexion ∇^N du fibré $\pi_{|\pi^{-1}(N)} : E \to N$. Soit $\sigma : N \to E$ une section lisse au-dessus de N.

1. Montrer que σ s'étend en une section $s : M \to E$. Indication : considérer une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de N par des cartes de trivialisations de E.
2. Soit s, s' deux prolongements de σ en des sections de E et $V \in T_pN$. Montrer que $\nabla_V s = \nabla_V s'$. En déduire une définition de ∇^N.
3. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe plongée (donc $\dot\gamma(t) \neq 0$ et γ est injective). Soit $\sigma(t)$ une section de E le long de $\gamma(t)$. Montrer que $D_t V(t) = \nabla^{\mathrm{Im}\,\gamma}_{\dot\gamma(t)} \tilde\sigma$ où $\tilde\sigma$ est la section au-dessus de γ définie par $\tilde\sigma(\gamma(t)) = \sigma(t)$.
4. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe $\mathcal{C}^1$ immergée (c'est-à-dire $\dot\gamma$ ne s'annule pas). Montrer que l'équation du transport parallèle le long de γ, $D_t s = 0$, peut s'écrire $\nabla_{\dot\gamma(t)} s = 0$.

Exercice 2 : La connexion tangentielle. Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété, $V : M \to TM$ un champ de vecteur (une section de TM), et $X \in T_pM$. On définit

$$\nabla_X V(p) := \Pi^{\perp}_{TM}(d_p V(X)),$$

où $\Pi^{\perp}_{TM}$ est la projection orthogonale sur $T_pM \subset \mathbb{R}^N$, relativement au produit scalaire euclidien standard. Montrer que :

1. ∇ est une connexion sur TM,
2. Si V, W sont deux champs de vecteurs sur TM et $X \in T_pM$, on a
$$d_X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle.$$
3. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
4. Les géodésiques de cette connexion ($D_t\dot\gamma = 0$) vérifient $\|\dot\gamma\| = \mathrm{cst}$. En déduire que ces géodésiques vérifient $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$), et sont les courbes d'accélération normale ($\ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}M$).

On considère maintenant une surface $S = \partial U \subset \mathbb{R}^3$ (où U est un ouvert). Pour $p \in S$, soit N le vecteur unitaire normal à S qui pointe vers l'extérieur (c'est-à-dire vers ${}^cU$). Pour $X, Y \in T_pS$, on définit :

$$\mathrm{II}_p(X, Y) := \langle X, dN(p)Y\rangle \text{ et } K(p) := \det \begin{pmatrix} \mathrm{II}_p(e_1, e_1) & \mathrm{II}_p(e_1, e_2) \\ \mathrm{II}_p(e_1, e_2) & \mathrm{II}_p(e_2, e_2) \end{pmatrix},$$

où (e_1, e_2, N) est une base orthornormée directe de $\mathbb{R}^3$ (on rappelle que II_p est symétrique).

5. Montrer que si $Y \in T_pS$, $L_Y N(p) := d_p N(Y) \in T_pS$.
6. Montrer que si $X \in \Gamma^\infty(TS)$, $\langle L_X N, X\rangle + \langle N, L_X X\rangle = 0$.
7. Montrer que si $(X, Y, N(p))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (ou encore si (X, Y) est une base orthornormée de T_pS), $\langle R^\nabla(X, Y)X, Y\rangle(p) = K(p)$. On pourra écrire $\nabla_X V = L_X V - \langle \vec N, L_X V\rangle \vec N$.

Exercice 3 : Un exemple plat : le cylindre. On considère à présent $C := \{x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que C est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ et dessiner C.

On considère la connexion tangentielle ∇ sur TC.

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ et $\gamma(t) := (x, y, t)$. Montrer que $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma = 0$, autrement dit que γ est une géodésique. Montrer que le transport parallèle le long de γ, en temps t est l'identité : $\mathbb{P}^t_\gamma = \mathrm{Id}$.
3. Soit maintenant $z \in \mathbb{R}$ et $\gamma'(t) := (\cos t, \sin t, z)$. Montrer que γ' est une géodésique, et que $P^t_{\gamma'} = R_t$, où R_t est la rotation d'angle t autour de l'axe e_z, c'est-à-dire $R_t{}^T(v_x, v_y, v_z) = {}^T(\cos tv_x + \sin tv_y, -\sin tv_x + \cos tv_y, v_z)$.
4. Calculer le commutateur $[P^\varepsilon_\gamma, P^\varepsilon_{\gamma'}]$ et en déduire que $R^\nabla \equiv 0$.

Exercice 4 : Un autre exemple plat : le cône. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), (e_r, e_θ, e_z) la base orthonormée classiquement attachée à chaque point de $\mathbb{R}^3 \backslash \{r = 0\}$ dans ces coordonnées.

1. Rappeler l'expression du changement de variable des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées cylindriques, ainsi que l'expression des vecteurs e_r, e_θ, e_z dans la base (e_x, e_y, e_z).
2. Soit $\gamma(t) := (R\cos t, R\sin t, z)$, et $e_r(t) := e_r(\gamma(t))\ldots$ Montrer que
$$\dot e_r(t) = e_\theta(t), \qquad \dot e_\theta(t) = -e_r(t), \qquad \dot e_z(t) = 0.$$

Soit C_α le demi-cone centré au point $(0, 0, h)$, d'axe vertical, d'ouverture 2α, et qui intersecte le plan $\{z = 0\}$ selon le cercle de rayon R (donc $\tan\alpha = \frac{R}{h}$). On munit TC_α de la connexion tangentielle.

3. Montrer que $C_\alpha \backslash \{(0, 0, h)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Dessiner et donner une équation de C_α.
4. Pour $p = (r, \theta, z) \in C_\alpha$, donner une base de T_pC_α et un vecteur orthogonal à T_pC_α.
5. Soit $\gamma'(t) := (\frac{R}{h}t, \theta, h - t)$ (en coordonnées cylindriques). Montrer que $\gamma'(t) \in C_\alpha$, que γ' est une géodésique, et que le transport parallèle le long de $\gamma'_{|[t,t']}$ est l'identité : $P^{[t,t']}_{\gamma'} = \mathrm{Id}$.

Soit maintenant $\gamma(t) := (R, t, 0)$ (en coordonnées cylindriques), $V_0 = V_\theta e_\theta + f_0(-Re_r + he_z)$ le vecteur attaché au point $(R, 0, 0)$, et $V(t)$ le transport parallèle de V_0 le long de $\gamma_{|[0,t]}$. On rappelle que $V(t)$ est déterminé par

$$\begin{cases} V(t) \in T_{\gamma(t)}C_\alpha, \\ D_tV(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}V(t) = 0 \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

On souhaite calculer $V(t)$. On pose $e_v := \frac{-Re_r+he_z}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $\omega := \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}}$.

6. Vérifier que V_0 est effectivement tangent à C_α.
7. Montrer que l'équation différentielle sur V peut se reécrire $\Pi^\perp_{TC_\alpha}(\dot V(t)) = 0$.
8. En écrivant $V(t) = V_\theta(t)e_\theta + f(t)(-Re_r + he_z)$ (justifier), donner les équations différentielles vérifiées par V_θ et f.
9. En déduire que

- Si $V_\theta(0) = 0$, $V(t) = \sin(\omega t)e_\theta + \cos(\omega t)e_v$
- si $f(0) = 0$, $V(t) = \cos(\omega t)e_\theta - \sin(\omega t)e_v$.

10. Soit $c_0 := \gamma_{|[0,2\pi]}$, $c_z(t) := (\frac{h-z}{h}R, t, z)$. Vérifier que les courbes c_z sont des lacets tracés sur C_α, et montrer que P_{c_z} est la rotation d'angle $2\pi\omega = 2\pi \sin\alpha$.
11. On considère les champs de vecteurs e_θ, e_v sur C_α, leurs flots $\Phi^t_{e_v}, \Phi^t_{e_\theta}$ et $P^t_v(p), P^t_\theta(p)$ le transport parallèle le long des courbes intégrales issues du point p. Pour $X \in T_pC_\alpha$, on pose aussi $\mathcal{P}^t_\theta(p, X) = (\Phi^t_{e_\theta}(p), P^t_\theta(p)X) \in T_{\Phi^t_{e_\theta}(p)}C_\alpha$. Montrer que $\mathcal{P}^{-\varepsilon}_\theta \circ \mathcal{P}^{-\varepsilon}_v \circ \mathcal{P}^\varepsilon_\theta \circ \mathcal{P}^\varepsilon_v(p, X) = (p, X)$ et en déduire que $R^\nabla \equiv 0$.

Exercice 5 : Un exemple courbé : la sphère

1. Soit N, N' deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [0, 1] \to N \cap N'$ un chemin dans l'intersection de N et N'. On suppose que $T_{\gamma(t)}N = T_{\gamma(t)}N'$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que le transport parallèle le long de γ dans N et dans N' (pour les connexions tangentielles) coïncident.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et $S(r) \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de rayon R. On appelle latitudes les intersections de la sphère avec des plans vectoriels verticaux. Les méridiens sont les intersections de la sphère avec des plans affines horizontaux.

2. Montrer que $e_\theta \in TS$, et est orthogonal aux latitudes. Déterminer le champ de vecteur unitaire e_l tangent aux latitudes qui pointe vers le pôle nord.
3. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to S^3(R)$ une paramétrisation du méridien équatorial ($S^3(R) \cap \{z = 0\}$), c'est-à-dire $\gamma(t) = (R, t, 0)$. Montrer que le cylindre $C := \{r = 0\}$ est tangent à $S^3(R)$ le long de γ. En déduire que $P^{[t,t']}_\gamma(e_\theta) = e_\theta$, $P^{[t,t']}_\gamma(e_l) = e_l$.
4. En déduire que γ est une géodésique. Montrer que les latitudes sont toutes des géodésiques.
5. On considère à présent le méridien $\gamma_z(t) := (\sqrt{R^2 - z^2}, t, z)$, $z > 0$. Déterminer le cône tangent à S le long de γ_z et calculer son ouverture. En déduire la transport parallèle le long de γ_z.
6. En raisonnant de manière analogue à la question 11 de l'exercice 4, montrer que la courbure de la sphère est $\frac{1}{R^2}$.