Le plan hyperbolique

On considère dans cette feuille le demi-plan hyperbolique $\mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ et le disque de Poincaré $\mathbb{D} := D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, munis respectivement des métriques Riemaniennes :

$$\rho_{\mathbb{H}} := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$
$$\rho_{\mathbb{D}} := \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2)^2}.$$

Exercice 1 : $\mathbb{H}$ est complet.

1. Soit $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On pose $m := \liminf_{t\to 0} f(t)$ et $M := \limsup_{t\to 1} f(t)$. Soit $J := \{f' > 0\}$. Montrer que J est une union au plus dénombrable d'intervalles, et que
$$\int_J f'(t)dt \geq M - m.$$
2. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [0,1) \to \mathbb{H}$ une courbe $\mathcal{C}^1$, avec $\liminf_{t\to 1} y(t) \in \{0, +\infty\}$. En utilisant la question précédente, montrer que $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = +\infty$.
3. Soit maintenant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1)$ avec $y(t) \in [\frac{1}{K}, K]$ et $x(t) \to \pm\infty$. Montrer que $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = +\infty$.
4. En déduire que $\mathbb{H}$ est complet.

Exercice 2 : Rappel sur les coefficients de Christoffel Soit (M,g) une variété riemanienne, $p \in M$, U une carte centrée en p et $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ les cahmps de vecteurs coordonnées sur U. On rappelle que les coefficients de Christoffel $\Gamma_{ij}^k(p)$ de la métrique g sont déterminés par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de g. On pose également $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ et

$$u_{ij}^k := g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

Finalement, on définit u_{ij}, Γ_{ij} les vecteurs colonnes dont les k-ièmes entrées sont respectivement u_{ij}^k et Γ_{ij}^k et G la matrice $n \times n$ d'entrées g_{ij}.

1. En utilisant la compatibilité de ∇ et g et la symétrie de la connexion, montrer que
$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(Z,X) - Z \cdot g(X,Y).$$
2. En déduire que $u_{ij}^k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$.
3. Montrer que $u_{ij}^k = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}$, et que $u_{ij} = G\Gamma_{ij}$.
4. En déduire que $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{lk} u_{ij}^l$, où $G^{-1} = (g^{ij})$.

Exercice 3 : Etude analytique de $\mathbb{H}$

1. Calculer les u_{ij}^k définis à l'exercice 1, montrer que $G^{-1} = x_2^2 \mathrm{Id}$, et montrer que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -1/x_2 \\ \Gamma_{11}^2 = 1/x_2 \end{cases}$$

2. Montrer que
$$g\left(R^{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)=-\frac{1}{x_2^4}.$$
En déduire que la courbure de $\mathbb{H}$ est -1.

On cherche dans la suite de l'exercice les géodésiques de $\mathbb{H}$. Dans les questions suivantes, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ désigne une géodésique.

3. Montrer que $(x_1(t),x_2(t))$ vérifient l'équation différentielle
$$x_1\ddot{x}_1-2\dot{x}_1\dot{x}_2=0 \qquad (1)$$
$$x_2\ddot{x}_2-(\dot{x}_2)^2+(\dot{x}_1)^2=0. \qquad (2)$$
4. Déduire de (1) que $\dot{x}_1=C_1x_2^2$ où C_1 est une constante.
5. Si $C_1=0$, calculer $x_2(t)$. En déduire que les verticales sont des géodésiques, paramétrées par $\mathbb{R}$. On suppose dans la suite $C_1\neq 0$.
6. En posant $u:={}^{\dot{x}_2}/_{x_2}$, montrer que l'équation (2) se réécrit $\dot{u}=-C_1\dot{x}_1$. En déduire que $x_2\dot{x}_2+C_1x_1x_2^2=C_2\dot{x}_1$, puis que
$$x_1^2(t)+x_2^2(t)=C_2x_1(t)+C_3.$$
7. Conclure que les géodésiques qui ne sont pas des droites verticales sont des demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses.
8. Montrer qu'on peut écrire $y(t)=\tau\cos u(t)$ et $x(t)=c+\tau\sin u(t)$ et que quitte à effectuer un changement de variable temporel $t'=at+b$, on peut suppose que $u(0)=0$ et $\dot{u}(0)=1$.
9. En utilisant (1), montrer que
$$u(t)=\arcsin\left(\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)$$
(On rappelle, et on pourra redémontrer, que $\displaystyle\int\frac{du}{\cos u}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right)$).
10. Retrouver que $(\mathbb{H},\rho_{\mathbb{H}})$ est complet.

Exercice 4 : Le même sans calculs, ou l'intérêt de la géométrie. On pose maintenant $x_1=x, x_2=y, z=x+iy$. On appelle Möb et Möb $(\mathbb{H})$ respectivement l'ensemble des transformations de $\overline{\mathbb{C}}$ du type $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ ou $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. On admettra que Möb $\subset$ Diffeo $(\overline{\mathbb{C}})$ et envoie une droite ou un cercle sur une droite ou un cercle.

1. Montrer que la longueur hyperbolique d'une courbe joignant deux points z,z'sur une même verticale est toujours supérieure à la longueur hyperbolique du segment $[z,z']$, et que l'égalité se produit exactement pour ce segment. En déduire que les vertciales sont des géodésiques.
2. Montrer que Möb $(\mathbb{H})$ préserve $\mathbb{H}$. (Les éléments de Möb $(\mathbb{H})$ préservent manifestement $\mathbb{R}$ et l'orientation).
3. Montrer que l'image d'une verticale par un élément φ de Möb $(\mathbb{H})$ est soit une verticale, soit un cercle centré sur $\mathbb{R}$. (Indication : φ est définie sur $\overline{\mathbb{C}}$ preserve $\mathbb{R}$ et φ' préserve les angles).
4. Montrer que les translations horizontales, les dilatations et l'inversion $z\mapsto -{}^{1}/_{z}$ sont des isométries de $\mathbb{H}$. En conclure que Möb $(\mathbb{H})\subset$ Isom $(\mathbb{H},\rho_{\mathbb{H}})$.

5. Montrer que Möb$(\mathbb{H})$ est transitif sur $\mathbb{H}$, c'est-à-dire que pour tout $z, w \in \mathbb{H}$, il existe $\varphi \in$ Möb$(\mathbb{H})$ tel que $\varphi(z) = w$.
6. En déduire que la courbure de $\mathbb{H}$ est constante.
7. Calculer l'ensemble Möb$(\mathbb{H}, i)$ des transformations de Möbius de $\mathbb{H}$ qui fixent i. Montrer que
$$\{\varphi'(i), \varphi \in \text{Möb}(\mathbb{H}, i)\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$
8. En déduire que les géodésiques de $\mathbb{H}$ sont exactement les demi-cercles centrés sur $\mathbb{R}$ et les verticales.
9. En déduire que si $z, z' \in \mathbb{H}$ et γ, γ' sont deux géodésiques passant par z, z', il existe une transformation de Möbius $\varphi \in$ Möb$(\mathbb{H})$ qui envoie z sur z' et γ sur γ'.
10. Montrer qu'une isométrie f de $\mathbb{H}$ qui fixe le point i et telle que $f'(i) = \text{Id}$ est l'identité. En déduire que Möb$(\mathbb{H}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, où $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ est l'ensemble des isométries de $\mathbb{H}$ qui préservent l'orientation.

Exercice 5 : $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$. Soit $\varphi(z) := \dfrac{z-i}{z+i} \in$ Möb.

1. Montrer que $\varphi(i) = 0$, que $\varphi(\overline{\mathbb{R}}) = S^1$. En déduire que $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\varphi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$, puis que
$$\varphi^* \rho_{\mathbb{D}} = \rho_{\mathbb{H}}.$$
3. Pour $z \in \mathbb{H}$, montrer qu'il existe une isométrie $\varphi_z : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ telle que $\varphi(z) = 0$.
4. Montrer que les géodésiques de $\mathbb{D}$ passant par 0 sont les droites.
5. Montrer que
$$d_{\mathbb{D}}(z, 0) = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$
En déduire que la boule $B_{\mathbb{D}}(0, r) = D(0, \frac{e^r-1}{e^r+1})$.
6. Montrer que les boules de centre z dans $\mathbb{H}$ sont des disques centrés sur un point à la verticale de z.
7. Si $C_r(p)$ désigne l'ensemble des points à distance hyperbolique r du point p, Montrer que
$$\ell_{\mathbb{H}}(C_r(p)) = \frac{2\pi r}{1 - \left(\frac{e^r-1}{e^r+1}\right)^2}.$$
Indication : Utiliser la question 3.
8. Calculer les DL de $\ell_{\mathbb{H}}(C_r(p))$ pour $r \approx 0$ et $r \approx +\infty$.
9. En déduire que la courbure de $\mathbb{H}$ est -1.