TD 1 : Espaces vectoriels.

1 Corps

Exercice 1 : $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$. On rappelle que

$$\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{/\sim}, \qquad p \sim q \iff n | p - q.$$

On note $[m]$ la classe de $m \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$. On pose alors

$$[n] + [m] = [n+m], \qquad [n] \cdot [m] = [nm].$$

1. Montrer que $+, \cdot$ sont bien définis sur $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ (Indication :il s'agit de voir que les choix faits pour calculer ces opérations n'ont pas d'incidence sur le résultat).
2. Montrer que $(\mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.
3. Montrer que si n n'est pas premier, $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ n'est pas intègre. En déduire que ce n'est pas un corps.
4. Montrer que si p est premier, $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ est un corps (Indication : théorème de Bezout).

Exercice 2 : Extensions finies. On définit

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Montrer en fait que c'est un sous-corps de $\mathbb{R}$ (donc un corps).

On définit à présent $\alpha := \sqrt[3]{2}$

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que α est inversible dans $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
5. Soit $x = a + b\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ non divisible par X tel que $P(x) = 0$. En déduire que $1/x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
6. Soit finalement $x = a + b\alpha + c\alpha^2 \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $c \neq 0$. Procéder comme pour la question précédente pour démontrer que $1/x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
7. En déduire que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
8. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 3.

2 Espaces vectoriels

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Sauf mentionné explicitement, vous pouvez penser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si vous le souhaitez.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{K}$ un corps (si vous voulez vous pouvez penser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Montrer que les espaces suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pour les lois définies dans le cours.

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Si X est un ensemble quelconque, $\mathbb{K}^X := \{f : X \to \mathbb{K}\}$.
3. Si X est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E^X := \{f : X \to E\}$. Montrer que cet exemple contient comme sous-exemple l'ensemble des suites à valeurs dans E (Indication : quel ensemble X ?).
4. Montrer finalement que $\mathbb{K}_n[X] \approx \mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{K}^n \approx \mathbb{K}^{\{1,\dots,n\}}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $I^{\mathbb{R}}$.

Exercice 5 : Si F, G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, On munit $F \times G$ des opérations

$$\begin{array}{l} (f,g) + (f',g') := (f + f', g + g') \qquad \forall (f,g), (f',g') \in F \times G, \\ \lambda \cdot (f,g) := (\lambda \cdot f, \lambda \cdot g) \quad \forall (f,g) \in F \times G,\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

1. Montrer que $(F \times G, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F \times \{0\}$ et $\{0\} \times G$ sont des sous-espaces vectoriels de $F \times G$.
3. Soit $\pi_F(f,g) := f$. Montrer que $\pi_F \in \mathcal{L}(F \times G, F)$. Déterminer l'image et le noyau de π_F.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$. On définit

$$\Gamma_u(x) := (x, u(x)) \in F \times G.$$

   Montrer que $\Gamma_u \in \mathcal{L}(F, F \times G)$ et que $\pi_F \circ \Gamma_u$ est un isomorphisme.

Exercice 6 : $(*)$ Espaces vectoriels quotients Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $H \subset E$ un sous-espace vectoriel. On définit

$$E_{/H} := E_{/\sim} \qquad x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in H.$$

On note $[x]$ la classe d'un élément de $x \in E$ dans $E_{/H}$. On définit une loi interne sur $E_{/H}$ par

$$[x] + [y] = [x + y] \qquad \forall [x], [y] \in E_{/H}$$

et une loi externe par

$$\lambda[x] = [\lambda x] \qquad \forall [x] \in E_{/H}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

1. Vérifier que les lois sont bien définies (Indication : il s'agit de montrer que le résultat ne dépend pas du représentant de $[x]$ choisi).
2. Montrer que $E_{/H}$ est un espace vectoriel.
3. On reprend les notations de l'exercice 2 avec $E = F \times G$ et $H = F \times \{0\}$. Montrer que $E_{/H}$ est isomorphe à G.

3 Applications linéaires

Exercice 7 : Soit

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$
2. Déterminer le noyau de u, sous forme :
   - implicite : les éléments de cet ensemble sont ceux vérifiant certaines équations,
   - paramétrée : les éléments de cet ensemble sont toutes les combinaisons linéaires de certains vecteurs explicites.
3. Déterminer $\operatorname{Im} u$ sous forme paramétrée, puis implicite.
4. On remplace dans $u(x)$ la première coordonnée en $x^2+2y+3z$, ou en $1+2y+3z$. Montrer que ces applications ne sont alors pas linéaires.

Exercice 8 : Soient

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0)+P''(1) \end{array}, \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

et

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \max\{P(x),\ x \in [0,1]\} \end{array}.$$

Lesquelles des fonctions u, v, w sont linéaires ?

Exercice 9 : Si $\Phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, montrer que son inverse est linéaire, c'est-à-dire $\Phi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Exercice 10 : Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E',F')$ sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes $\varphi \in \mathcal{L}(E,E')$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,F')$ tels que $v = \psi \circ u \circ \varphi^{-1}$ alors $\ker v = \varphi(\ker u)$ et $\operatorname{Im} v = \psi(\operatorname{Im} u)$.

Exercice 11 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un élément $x \in E\backslash\{0\}$ est appelé un vecteur propre de u si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est alors appelé la valeur propre de u associée au vecteur propre x.

1. Montrer que x est un vecteur propre de u si et seulement si $u(\operatorname{Vect}(x)) \subset \operatorname{Vect}(x)$.
2. Montrer que si tous les vecteurs de E sont des vecteurs propres, alors il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $u = c\operatorname{Id}$. On dit que u est une homotétie.

Exercice 12 : Soient

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x-y \\ -2x+3y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer deux vecteurs propres non proportionnels de u. Peut-il y en avoir un autre ?
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que v n'a pas de vecteur propre.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que v a deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.

Exercice 13 : Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ & & P & \longmapsto & \big(x \mapsto P(x)\big). \end{array}$$

Il s'agit de l'application qui à un polynôme associe la fonction polynomiale associée.

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Si $\operatorname{Card} \mathbb{K} = +\infty$, montrer que Φ est injective. Cela siginifie qu'on peut assimiler un polynôme à sa fonction polynomiale associée.
3. Si $\mathbb{K}$ est fini, montrer que Φ n'est pas injective, et en déduire qu'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est nulle.
4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$, trouver un polynôme non nul dans $\ker \Phi$.

Exercice 14 : Projections. Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est une projection (ou un projecteur) si $p \circ p = p$.

1. Montrer que p est une projection si et seulement si $p_{\operatorname{Im} p} = \operatorname{Id}$.
2. Montrer que $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$.
3. Montrer que l'application π_F définie dans l'exercice 2.3 est un projecteur.