TD 2 : Bases, dimension.

1 Familles libres

Exercice 1 : Soit $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $v_k = \mathrm{CL}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n)$.

Exercice 2 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que :

1. Si $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective alors $\big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big)$ est libre dans F.
2. Si $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective alors $\big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big)$ est génératrice de F.
3. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si la famille
$$(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \mathrm{CL}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n), v_{i+1} \dots, v_n)$$
est libre.

Exercice 3 :

1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^2$. En déduire que cette famille est également génératrice. Interpréter ces deux résultats en terme de systèmes linéaires.
2. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice, n'est pas libre mais que chaque couple de vecteurs dans cette famille est libre.

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer si les familles suivantes sont génératrices :

1. $\{{}^t(1,0,0), {}^t(0,1,0), {}^t(1,1,0)\}$
2. $\{{}^t(1,2,3), {}^t(4,5,6), {}^t(7,8,9)\}$

Exercice 5 : Dans $\mathbb{R}^4$, compléter la famille libre $\{{}^t(1,0,1,0), {}^t(0,1,0,1)\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 : Soit P_n une suite de polynômes de degrés exactement n. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, et que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On dit que la famille est à degrés échelonnés.

Exercice 7 : Soit $\mathbb{K}$ un corps infini (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des éléments deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{L}(a_0, \dots, a_n) := (L_i)_{i=0,\dots,n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n(X)$.
3. En déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer directement que cette famille est génératrice.

Exercice 8 :

1. Montrer que $\{t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une famille libre (Indication : considérer une combinaison linéaire nulle, et utiliser les croissances différentes en $\pm\infty$).
2. Montrer que $\{t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une famille libre.
3. En déduire que $\{t \mapsto \cos(\lambda t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une famille libre.

Exercice 9 : (∗) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes non proportionnels. Montrer que pour tout n, la famille $(P^k Q^{n-k})_{0 \le k \le n}$ est libre. Même question dans $\mathbb{R}[X]$? (Indication : récurrence sur le degré.)

Exercice 10 : Soit $\mathcal{S}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ et que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définis de la même façon sont aussi des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 : (∗) On rappelle que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que (α, β) est une famille indépendante sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si

$$\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle := \{m\alpha + n\beta,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille α, β est toujours liée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que (α, β) est libre sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\kappa := {}^{\alpha}/_{\beta} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $(\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
4. Montrer que si (α, β) est liée sur $\mathbb{Q}$, alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle \subset \gamma\mathbb{Z}.$$

   En déduire que $\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
5. Si $\kappa = {}^{\alpha}/_{\beta} \notin \mathbb{Q}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\left|\kappa - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n}.$$

   (Indication : $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ définit une grille de $\mathbb{R}$ uniforme de largeur ${}^{1}/_{n}$.)
6. En déduire que si (α, β) est libre sur $\mathbb{Q}$, il existe une infinité d'éléments de $\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $(0, 1)$.
7. En déduire que pour tout ε il existe deux éléments de $\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle$ distants de moins de ε.
8. En utilisant que $\mathbb{Z}\langle \alpha, \beta \rangle$ est un groupe additif, montrer que cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Dimension

Exercice 12 : Montrer que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$ et $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = 3$.

Exercice 13 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F < E$ un sous-espace vectoriel qui vérifie $\dim F = \dim E$. Montrer que $F = E$.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels. On définit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & F \times G & \longrightarrow & E \\ & & (x, y) & \longmapsto & x + y. \end{array}$$

1. Calculer $\operatorname{Im} \Phi$ et montrer que $\ker \Phi \approx F \cap G$.
2. Montrer que $\dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim E$.
3. En déduire que si $\dim F + \dim G > \dim E$, $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 15 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E avec $\dim E_1 = \dim E_2$. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à E_1, E_2, c'est à dire un sous-espace H tel que $H \oplus E_1 = H \oplus E_2 = E$. Même question avec un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels E_i de même dimension.

3 Endomorphisme, théorème du rang

Exercice 16 : Soit E un espace vectoriel.

1. Soient $F, G < E$ des sous-espaces vectoriels de même dimension. Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Soit $w \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $H < E$ tel que $w_{|H} : H \to \operatorname{Im} w$ est un isomorphisme. Déterminer l'ensemble des sous-espaces vectoriels $H < E$ ayant cette propriété.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\{w \in \mathcal{L}(E) \mid \ker w \supset \ker u\} = \{w \in \mathcal{L}(E) \mid \exists a \in \mathcal{L}(E), w = a \circ u\}.$$
4. $(*)$ Si $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\ker w \supset \ker u \cap \ker v$ si et seulement si il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$w = a \circ u + b \circ v.$$
(Reprenez les questions 2 et 3 pour $u, w \in \mathcal{L}(E, F)$. Puis considérer $(u, v) \in \mathcal{L}(E, E \times E)$ et $(w, w) \in \mathcal{L}(E, E \times E)$. Utilisez éventuellement des matrices.)
5. En déduire que l'ensemble des $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $au = bv$ est un sous-espace vectoriel de dimension
$$n(n + \dim(\ker u \cap \ker v)).$$

Exercice 17 : Soit E un espace vectoriel de dimension $n < +\infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle qu'un vecteur propre de u est un vecteur $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $u(x) \in \operatorname{Vect}(x)$.

1. Si $n = 2$ et u a trois vecteurs propres différents, montrer que u est une homotétie.
2. Construire un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 qui n'est pas une homotétie, mais qui a 4 vecteurs propres distincts.

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F < E$ est stable par u si $u(F) \subset F$.

3. On suppose que pour un certain $0 < k < n$, tous les sous-espaces vectoriels de dimension k sont invariants par u. Montrer que toutes les droites sont invariantes par u, puis que u est une homotétie.

Exercice 18 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\forall k$, $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$.
2. Montrer que si $\ker u^k = \ker u^{k+1}$, alors $\forall p \geq k$, $\ker u^p = \ker u^k$. On dit alors que la suite des noyaux de u est stable à partir du rang k.
3. En déduire que si $n < \infty$, la suite des noyaux de u est toujours stable à partir du rang n.
4. Si $n = +\infty$, construire un enomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la suite des noyaux ne se stabilise pas.
5. Pour tout n et $k \leq n$ (mais $k < +\infty$), construire un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la suite des noyaux se stabilise exactement au rang k.

Exercice 19 : Endomorphismes nilpotents. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si il existe k tel que $u^k = 0$. On définit l'indice de nilpotence de u comme

$$\mathrm{nil}(u) := \{\min k \mid u^k = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{nil}(u) \leq n$. (Indication : voir exercice 3).
2. On suppose que $\mathrm{nil}(u) = n$. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ (justifier son existence). Montrer que la famille
$$(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$$
est une base de E.
3. Plus généralement, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que
$$(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)), \qquad k = \mathrm{nil}(u)$$
est libre.

La suite de l'exercice est de difficulté $(**)$. On pose $k = \mathrm{nil}(u)$. On cherche une base de E sur laquelle l'action de u est très simple.

4. Soit $(y_1, \ldots, y_{p_1})$ une base de $\mathrm{Im}\, u^{k-1}$ et $x_1, \ldots, x_{p_1} \in E$ tels que $u^{k-1}(x_i) = y_i$. Montrer que la famille
$$(x_1, u(x_1), \ldots, u^{k-1}(x_1), x_2, u(x_2), u^{k-1}(x_2), \ldots, x_{p_1}, u(x_{p_1}), \ldots, u^{k-1}(x_{p_1}))$$
est libre. Quelle est l'action de u sur cette famille ?
5. Montrer que $(y_1, \ldots, y_{p_1}, u^{k-2}(x_1), \ldots, u^{k-2}(x_{p_1}))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}\, u^{k-2}$. On complète cette famille par des vecteurs $y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_2}$ en une base de $\mathrm{Im}\, u^{k-2}$. Comme avant, on choisit $(x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2})$ tels que $u^{k-2}(x_i) = y_i$. Montrer que la famille
$$(x_1, \ldots, u^{k-1}(x_1), \ldots, x_{p_1}, \ldots, u^{k-1}(x_{p_1}), x_{p_1+1}, \ldots, u^{k-2}(x_{p_1+1}), \ldots)$$
est une famille libre. Quelle est l'action de u sur cette famille. Lesquels de ces vecteurs appartiennent à $\mathrm{Im}\, u^{k-3}$?
6. En raisonnant par récurrence en complétant les $\mathrm{Im}\, u^j$ successivement, construire une base de E sur laquelle l'action de E est très simple.