Déterminant, volume algébrique

Motivation : Une application linéaire peut dilater des directions et en contracter d'autres. Mais c'est homogène sur l'espace.
Un invariant géométrique : taux de dilatation du volume.
Pb : définir la notion de volume pour voir comment une AL le transforme.

1. Volume algébrique

Pour définir le volume on a deux possibilités. Dans les deux cas, on doit fixer une base, qui donne un pavé unité auquel on attribue le volume 1. Donc on commence par fixer une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V.

Et on décide que $Vol_{\mathcal{B}}\Big(\underbrace{\{ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \ \lambda_i \in [a_i, b_i] \}}_{\text{Pavé } \mathcal{P}} \Big) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Ensuite deux possibilités :

1. $\Omega \subset V$ qcq.

$$Vol_{\mathcal{B}}(\Omega) = \inf \{ \sum vol_{\mathcal{B}}(P_i), \ \ P_i \in \mathcal{P}, \ P_i \cap P_j = \emptyset, \ \cup P_i \supset \Omega \}.$$

Logique mais vraies difficultés, cours intégration de L3.

2. On construit le volume seulement sur une classe très restreinte d'ensembles : les parallélépipèdes, et on le fait algébriquement. C'est le point de vue qu'on adopte.

Def : Soit V un espace vectoriel de dimension n, et $(v_1, \dots, v_n)$ n vecteurs. Le parallélépipède associé à ces vecteurs est

$$\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \{ \sum \lambda_i v_i, \ \lambda_i \in [0,1] \}.$$

Si $(v_1 \dots v_n)$ n'engendre pas V, on dit que $\mathcal{P}(v_1 \dots v_n)$ est plat.

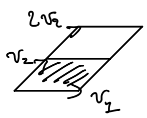
Déf: Un volume (algébrique) sur V est une fonction

$$\mathrm{Vol} : V^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v_1 - v_n) \longmapsto \mathrm{Vol}(v_1 - v_n) \quad (\text{le volume de } \mathcal{P}(v_1 - v_n))$$

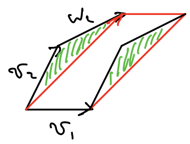
qui vérifie les propriétés suivantes:

1. $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_{i-1}, t v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = t\, \mathrm{Vol}(v_1 - v_n)$

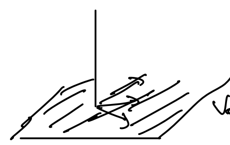
   ⚠ pas $|t|$: donc $\mathrm{Vol}(v_1, -, v_n) = -\mathrm{Vol}(-v_1, v_2, --, v_n)$



2. $\mathrm{Vol}(v_1, -, v_{i-1}, v_i + w_i, v_{i+1}, -, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1 - v_n) + \mathrm{Vol}(v_1, -, w_i, \cdot - v_n)$



3. Si $(v_1 - v_n)$ liée, $\mathrm{Vol}(v_1, -, v_n) = 0$.
   (le volume d'1 pavé plat est nul).



$\mathrm{Vol} = 0$.

On note $\Lambda^n V^*$ l'ensemble des volumes algébriques sur V.

Rques: Si $\theta \in \Lambda^n V^*$:

ⓐ. $\theta(v_1, -, v_i + \mathrm{CL}(\{v_j\}_{j \neq i}), \dots, v_n) = \theta(v_1 - v_n)$

ⓑ. $\theta(v_1, -, \underset{i}{v_i}, -\underset{j}{v_j}, -v_n) = -\theta(v_1 - \underset{i}{v_j} - \underset{j}{v_i} - v_n)$

ⓒ. Si $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$, $\theta(v_{\sigma(1)}, --, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \theta(v_1 - v_n)$.

Preuve: ⓐ RHS $\overset{①②}{=} \theta(v_1 - v_n) + \mathrm{CL}\{\theta(v_1 - \underset{i}{v_j}, - \underset{j}{v_j})\} \overset{③}{=} \theta(v_1 - v_n)$.

ⓑ $\theta(v_1, -, \underset{i}{v_i + v_j}, - \underset{j}{v_i + v_j} - v_n) \overset{③}{=} 0$

$= \theta(v_1, -, v_i, -v_j, -) + \theta(v_1 - v_j - v_i, -)$

$+ \theta(v_1, -v_i, -v_i, -) + \theta(v_1 - v_j - v_j -)$

$= \theta(v_1 - v_i, -v_j - v_n) + \theta(v_1 - v_j - v_i - v_n)$

ⓒ $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ donc $\exists\, \tau_1 - \tau_\ell$ transpo telles que $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^\ell$.

Or $\forall v_1, -, v_n$, $\forall \tau$, $\theta(v_{\tau(1)}, --, v_{\tau(n)}) = -\theta(v_1 - v_n)$. Donc

$\theta(v_{\sigma(1)}, -, v_{\sigma(n)}) = \theta(v_{\tau_1(\sigma'(1))}, --, v_{\tau_1(\sigma'(n))}) = -\theta(v_{\sigma'(1)}, -, v_{\sigma'(n)}) = \dots = (-1)^\ell\, \theta(v_1 - v_n)$. □

<u>Theoreme :</u> $\Lambda^n V^*$ est un espace vectoriel de dimension 1.

<u>Preuve :</u> On va voir que $\Lambda^n V^*$ est un sev de $\mathbb{R}^{V^n}$ de dimension 1.

- $0 \in \Lambda^n V^*$ evident.
- Si $\theta_1, \theta_2 \in \Lambda^n V^*$: $\to \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 (v_1, \dots, v_{i-1}, t v_i, \dots, v_n) = t(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2)(v_1 \dots v_n)$

  $\to \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + w_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 (v_1, \dots, v_n) + \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 (v_1 \dots w_i, \dots v_n)$

  Donc $\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 \in \Lambda^n V^*$

Donc c'est un sous espace vectoriel

- Montrons qu'il est de dimension ≤ 1. On veut donc démontrer que $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Lambda^n V^*$ (non nuls) il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tq $\theta_2 = c\,\theta_1$.

  Fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V.

  Remarquons alors la chose suivante. Si $v_1 \dots v_n \in V$, ecrivons $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$.

  Alors $\theta(v_1, \dots, v_n) = \theta\left(\sum_{i_1} v_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{j} v_{jj} e_{j}, \dots\right)$
  $$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{j=1}^{n} v_{i_j j}\, \theta(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

  De plus, si $i_j = i_k$, $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ est liée, donc $\theta(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. Donc finalement :
  $$\theta(v_1 \dots v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \prod_{j=1}^{n} v_{\sigma(j) j}\; \theta(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$
  $$= \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} v_{\sigma(j) j}\right] \cdot \theta(e_1, \dots, e_n)$$

  Ainsi, si $\theta(e_1 \dots e_n) = 0$, alors $\theta \equiv 0$. Et si $\theta_1, \theta_2 \neq 0$: en posant $c := \dfrac{\theta_2(e_1 \dots e_n)}{\theta_1(e_1 \dots e_n)}$, on a :
  $$\forall v_1 \dots v_n \in E, \quad \theta_2(v_1 \dots v_n) = c\,\theta_1(v_1 \dots v_n).$$

  Donc tous les volumes algebriques non-nuls sont proportionels.
  Donc $\Lambda^n V^*$ est de dimension ≤ 1.

- Reste à construire un Θ non nul. On va utiliser le point précédent.

Soit $(e_1 - e_n)$ une base de V, $(v_1 - v_n)$ qcq

$$v_i = \sum v_{ij} e_j \quad \text{qui définissent uniquement les } v_{ij}.$$

On pose $\Theta(v_1 - v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} v_{\sigma(j) j}$. Alors :

→ $\Theta(e_1 - e_n) = 1$ donc $\Theta \neq 0$.

→ $\Theta(v_1, .., \lambda v_i + \mu w_i, - v_n)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{j \neq i} v_{\sigma(j) j} . [\lambda v_{\sigma(i) i} + \mu w_{\sigma(i) i}]$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \lambda \varepsilon(\sigma) \prod_j v_{\sigma(j) j} + \mu \varepsilon(\sigma) \left[\prod_{j \neq i} v_{\sigma(j) j}\right] w_{\sigma(i) i}$$

$$= \lambda \Theta(v_1 - v_n) + \mu \Theta(v_1 - w_i - - v_n)$$

→ Soit $\tau \in \mathfrak{S}(n)$ et $v'_1, -, v'_n = v_{\tau(1)}, --, v_{\tau(n)}$.

Alors $v'_i = v_{\tau(i)} = \sum v_{\tau(i) j} e_j = \sum v'_{ij} e_j$.

Donc $\Theta(v_{\tau(1)} - v_{\tau(n)}) = \Theta(v'_1 - v'_n)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} v'_{\sigma(i) i}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod v_{\sigma \circ \tau(i), i}$$

Or $\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(n) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(n) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{array}$ est une bijection (d'inverse $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau^{-1}$)

Donc $\Theta(v_{\tau(1)}, -, v_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma' \circ \tau^{-1}) \prod v_{\sigma'(i) i}$

$$= \varepsilon(\tau^{-1}) \sum_{\sigma'} \varepsilon(\sigma') \prod_i v_{\sigma'(i) i}$$

$$= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod v_{\sigma(i) i}$$

$$= \varepsilon(\tau) \Theta(v_1 - v_n).$$

Donc Θ est bien un volume algébrique non nul. Donc $\Lambda^n V^*$ est un ev de dimension 1. $\square$

<u>Exercices</u>: Calculs pratiques de volumes algébriques.

$\mathrm{Vol}(e_1, e_2, e_3) = 1$ (de $\mathbb{R}^3$) Calculer $\Theta\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$.

Prop : Si $\theta \in \Lambda^n V^*$ est non nul,

$(v_1 - v_n)$ base de $V \iff \theta(v_1 - v_n) \neq 0$.

Preuve : • $\Rightarrow$: Soit $(v_1 - v_n)$ une base de V ;

On a vu que $\forall (v'_1, -, v'_n)$, on peut écrire

$\theta(v'_1, -, v'_n) = C(v'_1 - v'_n)\ \theta(v_1 - v_n)$

(où C est polynomial en les v'_{ij} définis par $v'_i = \sum v'_{ij} v_j$).

Donc si $\theta(v_1 - v_n) = 0$, $\theta \equiv 0$ ABS.

• $\Leftarrow$: Si $\theta(v_1 - v_n) \neq 0$, montrons que $(v_1 - v_n)$ est libre.

Si $\sum \lambda_i v_i = 0$ avec l'un des $\lambda_i \neq 0$ (par ex λ_1),

On a alors $v_1 = CL(v_j, j \neq 1)$.

Or $\theta(v_1, -, v_n) = \theta(v_1 - CL(v_j, j \neq 1), v_2, --, v_n)$

$= \theta(0, v_2 - v_n) = 0$ par multi-linéarité. $\square$

2. Determinant d'un endomorphisme :

Def : Soit E un ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\theta \in \Lambda^n E^*$, on définit

$$u^*\theta : (v_1 - v_n) \mapsto \theta(u(v_1), \dots, u(v_n))$$

Prop : $u^* \in \mathcal{L}(\Lambda^n E^*)$

Preuve : • $u^*\theta \in \Lambda^n E^*$ par linéarité de u :

$$u^*\theta(v_1, -, \lambda v_i + \mu w_i, - v_n) = \theta(u(v_1) - u(\lambda v_i + \mu w_i), - u(v_n))$$
$$= \theta(u(v_1) - \lambda u(v_i) + \mu u(w_i), -, u(v_n))$$
$$= \lambda\theta(u(v_1) - u(v_n)) + \mu\, \theta(u(v_1) - u(w_i), - u(v_n))$$
$$= \lambda u^*\theta(v_1 - v_n) + \mu u^*\theta(v_1 - w_i - v_n)$$

$$\to u^*\theta(v_{\sigma(1)} - v_{\sigma(n)}) = \theta(u(v_{\sigma(1)}) - u(v_{\sigma(n)}))$$
$$= \varepsilon(\sigma)\, \theta(u(v_1), -, u(v_n))$$
$$= \varepsilon(\sigma)\, u^*\theta(v_1 - v_n).$$

• $\theta \mapsto u^*\theta$ est evidt linéaire. $\square$

Corollaire : $\exists c \in K / \forall \theta \in \Lambda^n E^*,\ u^*\theta = c\theta$. Cette constante c est appelée le déterminant de u, noté $\det(u)$

Preuve : $\Lambda^n E^*$ est un ev de dimension 1, donc tout endomorphisme de $\Lambda^n E^*$ est une dilatation, c'est-à-dire une multiplication par un scalaire $c \in K$. Donc $u^* = c\,\mathrm{id}$. $\square$.

Prop : Si $\begin{cases} (e_1 - e_n) \text{ base de } E, \\ \theta \in \Lambda^n E^*, \theta \neq 0 \end{cases}$ $\det u = \dfrac{\theta(u(e_1), \dots, u(e_n))}{\theta(e_1 - e_n)}$.

Preuve : $\underset{\displaystyle \theta(u(e_1), \dots, u(e_n)).}{u^*\theta(e_1 - e_n) \overset{}{=}} \det u\, \theta(e_1 - e_n)$ par défin de $\det u$.

Et puisque $(e_1 - e_n)$ base, $\theta(e_1 - e_n) \neq 0$. $\square$.

Théorème : Soit E un Kev de dim finie n et $u \in \mathcal{L}(E,E)$.
u est un isomorphisme $\Longleftrightarrow \det u \neq 0$.

Preuve : u isomorphisme $\Longleftrightarrow u(\text{base de } E) = \text{base de } E$.

Alors fixons $\theta \in \Lambda^n E^*$, $\theta \neq 0$, $(e_1, -, e_n)$ base de E. La prop précédente montre que
$$\det u = \frac{\theta(u(e_1) - u(e_n))}{\theta(e_1 - e_n)}.$$

Alors $\det u \neq 0 \Longleftrightarrow \theta(u(e_1) - u(e_n)) \neq 0$
$\Longleftrightarrow (u(e_1), -, u(e_n))$ base.

Comme ceci est vrai quel que soit la base choisie initialement $(e_1 - e_n)$, on a bien $\det u \neq 0 \Longleftrightarrow \forall \beta$ base $u(\beta)$ base. $\square$.

<u>Prop</u> : $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$.

<u>Preuve</u>:
$$\begin{aligned}(u \circ v)^* \theta(\underset{\overset{\cap}{E}}{v_1} - \underset{\overset{\cap}{E}}{v_n}) &= \theta(u \circ v(v_1), -, u \circ v(v_n)) \\ &= \theta(u(v(v_1)), \dots, u(v(v_n))) \\ &= u^* \theta(v(v_1), -, v(v_n)) \\ &= v^* u^* \theta(v_1 - v_n)\end{aligned}$$

Donc $\underset{\overset{\shortparallel}{\det(u \circ v)\, \mathrm{Id}.}}{(u \circ v)^*} = v^* \circ u^* = v^*(\det u \ \mathrm{id}) = \det u \ v^* = \det u \det v \ \mathrm{Id}$

(Partout ici, $\mathrm{id} : \Lambda^n E^* \longrightarrow \Lambda^n E^*$).

Donc $\det(u \circ v) = \det u \det v$. $\square$,

<u>Corollaire</u>:
- $\det : (GL(E), \circ) \longrightarrow (K^*, \cdot)$ morphisme de groupe.
- $SL(E) := \operatorname{Ker} \det = \{u \,/\, \det u = 1\}$ s-grpe de $GL(E)$.

<u>Corollaire</u> : $\det(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \det u$ (voir signification + tard).

<u>Exercices</u> :
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad \det u = 1$.
$$\begin{aligned} e_1 &\longmapsto e_1 \\ e_2 &\longmapsto e_2 + 3e_1 \\ e_3 &\longmapsto e_3 + 6{,}7\, e_2 + \pi e_3 \end{aligned}$$

3. Interprétation géométrique :

Prop : Soit E un k-ev de dim n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\theta \in \Lambda^n E^*$ et $(e_1 \ldots e_n)$ une base de E. Alors

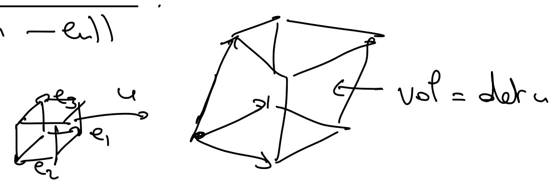
$$\det u = \frac{\theta(u(e_1) \ldots u(e_n))}{\theta(e_1 \ldots e_n)}$$

Preuve : C'est la définition de u^*. □

Interprétation :

$$\det u = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{P}(u(e_1), \ldots, u(e_n)))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{P}(e_1, \ldots, e_n))} = \frac{\mathrm{Vol}[u(\mathcal{P}(e_1 \ldots e_n))]}{\mathrm{Vol}(\mathcal{P}(e_1 \ldots e_n))}.$$

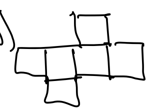
Donc $\det u$ représente la dilatation volumique de l'endomorphisme u.



Thm : Soit $\Omega \subset E$ de la forme :

$$\Omega = \coprod_{i \in I} \left(\vec{v_i} + \mathcal{P}(t_1 \vec{e_1}, \ldots, t_n \vec{e_n})\right), \quad \# I < +\infty$$

On définit $\mathrm{Vol}\,\Omega = \sum_{i \in I} t_1 \ldots t_n \mathrm{Vol}(\mathcal{P}(e_1 \ldots e_n))$



Alors $\mathrm{Vol}\, u(\Omega) = \det u \,\mathrm{Vol}\,\Omega$

Autrement dit, $\det u$ est le facteur de dilatation de volume.

En fait c'est plus général : on aura une théorie de la mesure (L3) qui associe à bcp d'ensembles (par exemples des limites croissantes d'unions de pavés) une mesure. $\det u$ sera encore le facteur de dilatation de ces mesures :

$$\mathrm{Vol}(u(\Omega)) = |\det u| \,\mathrm{Vol}(\Omega).$$

4. Determinant d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Def : $\det(A) := \det(u)$ où $u \in End(\mathbb{R}^n) \longleftrightarrow A$.

On souhaite un algorithme de calcul de $\det A$.

Rappel : → L'ensemble des volumes algébriques est de dimension 1.
→ Si θ est un volume algébrique, β est une base de $\mathbb{R}^n$ qcq, $\det u = \dfrac{\theta(u(e_1), \dots, u(e_n))}{\theta(e_1 \dots e_n)}$

Soit donc $\mathcal{E} := (e_1 \dots e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit θ l'unique volume algébrique tq $\theta(e_1 \dots e_n) = 0$.

Alors $\det A = \det u = \theta(u(e_1), \dots, u(e_n))$

$$= \theta(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

$$= \theta\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

Notation : $\det A =: \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Si on va chercher dans le cours sur les déterminants, on trouve

Prop : $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

Mais ce n'est pas efficace : $\# \mathcal{S}_n = n!$ beaucoup d'opérations.
On utilise plutôt les propriétés suivantes :

Prop :
- $\det Id = 1$
- $\begin{vmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_i + \alpha C_j & \cdots & C_n \end{vmatrix}$ (additio colonnes)
- $\det {}^tA = \det A$
- $\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$ (additio ligne).
- $\det |C_{\sigma(1)}, \dots C_{\sigma(n)}| = \varepsilon(\sigma) \det(C_1 \dots C_n)$.

<u>Preuve</u>: On utilise les propriétés du volume algébrique:

- $\left| C_1 - C_i + \alpha C_j - - C_n \right| = \theta (C_1 - - C_i + \alpha C_j - - - C_n) = \theta (C_1 - C_n)$
- Idem pour $\left| C_{\sigma(1)}, - -, C_{\sigma(n)} \right| = \varepsilon(\sigma) \left| C_1 - C_n \right|$
- $\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i) i}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j \sigma^{-1}(j)}$$

Or $\begin{array}{l} S_n \longrightarrow S_n \\ \sigma \longmapsto \sigma^{-1} \end{array}$ est une bijection donc:

$$= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma'^{-1}) \prod a_{j \sigma'(j)}$$

Et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ car $\varepsilon(\sigma \sigma^{-1}) = 1 = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in\{-1,1\}} \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})}_{\in\{-1,1\}}$

Donc $\det {}^tA = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_j a_{j \sigma'(j)} = \det A$.

- alors $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_i + \alpha L_j \\ L_n \end{pmatrix} = \det {}^t\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \det ({}^tL_1 \ldots {}^tL_i + \alpha {}^tL_j \ldots {}^tL_n)$ (i)

$$= \det ({}^tL_1 - - - {}^tL_i \ldots {}^tL_n)$$

$$= \det {}^t\begin{pmatrix} L_1 \\ | \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ | \\ L_n \end{pmatrix}. \qquad \square.$$

<u>Def</u>: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en oubliant des lignes et des colonnes.

En particulier : $\mathrm{Ext}(A, i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ (ligne i et colonne j barrées)

Le mineur (i,j) de A $\quad M_{ij}(A) := \det \mathrm{Ext}(A, i, j)$.

<u>Th</u>: (développement par rapport à la colonne j):

$\forall j, \ \det A = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$.

Développement par rapport à la ligne i:

$\forall i, \ \det A = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$

<u>Lemme</u>: $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ * & & A & \end{pmatrix} = \det A$.

<u>Preuve du lemme :</u> Posons $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ * & A \end{pmatrix}$.

Commençons par remarquer que

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} L_1(A') \\ * \; \boxed{\begin{matrix} L_1(A) \\ L_n(A) \end{matrix}} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} * & L_1(A) \\ & L_1(A') \\ * & L_2(A) \\ * & L_n(A) \end{pmatrix} = \dots = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} * \; \boxed{A} \\ L_1(A') \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} * & A \\ 1 & 0 - 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} C_1 & \boxed{C_1(A) \cdots C_n(A)} \\ & 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 - 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det A'' \quad \text{où} \quad A'' = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\det A'' = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a''_{i\sigma(i)}$$

Mais comme $a''_{nj} = 0 \ \forall j \neq 0$, $\prod a''_{i\sigma(i)} = 0 \ \forall \sigma \,/\, \sigma(n) \neq n$

Donc

$$\det A'' = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n) = n}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{a_{nn}}_{=1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n) = n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} a_{i\sigma(i)}$$

Mais $\sigma \in S_n$ tq $\sigma(n) = n$ peut être vue comme une permutation de $\{1 \dots n-1\}$ avec la même signature. Donc

$$\det A'' = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} a_{i\sigma(i)} = \det A.$$

Donc finalement, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ * & A \end{pmatrix} = \det A$. $\square$

Revenons à présent au théorème :

<u>Preuve du théorème (Développement du déterminant selon lignes ou colonnes) :</u>

Commençons par remarquer que, puisque $\det {}^tA = \det A$, la 1° formule est équivalente à la deuxième.

En effet, ② $\Rightarrow$ ① :

$$\det A = \det {}^tA \overset{②}{=} \sum_i (-1)^{j+i} ({}^tA)_{ji} \; M_{ji}({}^tA)$$

$$= \sum_i (-1)^{i+j} A_{ij} \det \mathrm{Ext}({}^tA, j, i)$$
$$= \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det {}^t \mathrm{Ext}(A, i, j)$$
$$= \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathrm{Ext}(A, i, j)$$
$$= \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}.$$

Il suffit donc de démontrer la formule (2), cad le développer par rapport aux lignes.

- Démontrons donc ce développement en ligne.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}$$
$$= \sum_{\sigma \in S(n)} \varepsilon(\sigma) a_{i\sigma(i)} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) a_{ij} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\substack{\sigma \in S(n) \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$$
$$=: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_i$$

Ici, Δ_i ne fait intervenir que des a_{kl}, $k \neq i$. Par conséquent, $\Delta_i = \det A_i$ où A_i est donnée par:

$$A_i = \begin{bmatrix} & L_1 & \\ & \vdots & \\ 0\,0\,1\,0 & \text{——} & 0 \\ & \uparrow & \\ & L_n & \end{bmatrix} \leftarrow i$$
$$ \quad j$$

En effet le calcul précédent appliqué à A_i donne précisément

$$\det A_i = \sum_{j=1}^{n} (A_i)_{ij} \Delta_i(A) \quad \text{car}$$

Δ_i ne fait intervenir que les lignes différentes de i, qui sont les mêmes pour A et pour A_i. Puisque $(A_i)_{ij} = 1$ si $i=j$, 0 sinon, on trouve $\det A_i = \Delta_i(A)$.

Alors
$$\det A_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & - & - & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1\,1} & - & - & a_{i-1\,n} \\ 0 & \text{—}\,0\,1\,0 & \text{——} & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & - & - & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$\updownarrow$ echanges L_i, L_{i-1}

$$= -\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-2\,1} & \cdots & a_{i-2\,n} \\ 0 & \text{—}\,0\,1\,0\,\text{—} & 0 \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$= \dots = (-1)^{i+1} \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \; 1 \; 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \longleftarrow \widehat{L_i} \text{ (enlevée)}.$$

$$= (-1)^{i+j+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ a_{1j} & \\ \vdots & \boxed{\mathrm{Ext}(A,i,j)} \\ a_{nj} & \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \det \mathrm{Ext}\,A(i,j) \qquad [\text{lemme précédent}]$$

$$= (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A)$$

On en conclut la formule recherchée :

$$\det A = \sum a_{ij} \Delta_i = \sum a_{ij} \det A(i) = \sum a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A). \quad \square$$

IV Formule de Cramer :

Définition (Comatrice) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit la comatrice de A :

$$Com(A) = \left((-1)^{i+j} M_{ij}(A) \right) \quad \text{où } M_{ij}(A) = \det Ext(A,i,j) \text{ (mineur).}$$

Théorème : $A\,{}^t Com\, A = (\det A).Id$

Preuve :

$$(A\,{}^t Com\, A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} ({}^t Com\, A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (Com\, A)_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} M_{jk}(A) =: \Delta_{ij}.$$

- Pour $i = j$, $\Delta_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}(A) = \det A$
- Pour $i \neq j$ $\Delta_{ij} = \det A'_{ij}$ où

$$A'_{ij} = \begin{array}{c} \left(C_1(A) \dots C_i(A) \dots \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{C_i(A)} \dots C_n(A) \right) \end{array}.$$

En effet, le développement selon la colonne j donne exactement l'expression ci-dessus. Puisque $C_i(A'_{ij}) = C_j(A'_{ij})$, $\det A'_{ij} = 0$.

Donc finalement : $(A\,{}^t Com\, A)_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Donc $A\,{}^t Com\, A = \det A . Id$. □

Corollaire : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t Com\, A$.

Exercice : Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer A^{-1} par cette méthode pour une matrice $n \times n$ et appliquer à $n = 50$.

Cette formule n'a pas d'intérêt calculatoire. Mais elle donne des informations théoriques importantes.

Thm :
- La solution de $E(A,y)$ est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où

$$x_i = \frac{|C_1(A) \dots C_{i-1}(A)\ y\ C_{i+1}(A), \dots C_n(A)|}{|C_1(A) \dots \dots C_n(A)|} \quad \text{(Formule de Cramer)}$$

- $(A,y) \longmapsto X(A,y)$ est linéaire en y et rationnelle en les (a_{ij}).

Preuve : $X = A^{-1}Y$, Donc

$$x_i = (A^{-1}Y)_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vect colonne}}}{=} (A^{-1}Y)_{i1} = \sum_k (A^{-1})_{ik} Y_{k1} = \sum_k (A^{-1})_{ik} y_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_k ({}^t\mathrm{Com}\, A)_{ik}\, y_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_k (\mathrm{Com}\, A)_{ki}\, y_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_k (-1)^{i+k} y_k\, \Pi_{ki}(A)}_{\text{developpement / colonne } i \text{ de } \det\left(C_1(A) \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{Y} \cdots C_n(A)\right)}$$

$$= \frac{1}{\det A} \det\left(C_1(A) \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{Y} \cdots C_n(A)\right). \quad \square$$

Exe : • $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(I + tA) = \mathrm{Tr}\, A$.

(2 preuves : → invariance par conjugaison
→ Calcul direct) .

- VDM
- Determinants matrices par bloc.
- Dim 3 pour exples pratiques.