Bases, dimension

1. Parties generatrices, parties libres

Def : (CL). Soit $(E,+,\cdot)$ un K.ev, $\mathcal{F} \subset E$.

$x \in E$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ si

$$x = \sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f \quad \text{où } \#\{f / \lambda_f \neq 0\} < +\infty$$

$S := \{f / \lambda_f \neq 0\}$ est le support de la combinaison linéaire, il est donc fini !!!

$$x = \sum_{f \in S} \lambda_f f . \quad \text{C'est une } \underline{\text{somme finie}} !$$

- L'espace engendré par $\mathcal{F}$ est :

$$\langle \mathcal{F} \rangle := \{\text{combinaisons linéaires de } \mathcal{F}\}$$
$$= \{ \sum \lambda_f f , \ \mathrm{Supp}(\lambda_f) \text{ fini} \}.$$

Prop : $\langle \mathcal{F} \rangle$ est un sev de E.

Preuve : Si $x, y \in \langle \mathcal{F} \rangle$, $\alpha, \beta \in K$.

$$x = \sum \lambda_f^x f \qquad S_x := \mathrm{Supp}(\lambda_f^x)$$
$$y = \sum \lambda_f^y f \qquad S_y := \mathrm{Supp}(\lambda_f^y)$$

$$\alpha x + \beta y = \sum_f (\alpha \lambda_f^x + \beta \lambda_f^y) f$$
$$= \sum_{f \in S_x \cup S_y} \underbrace{(\alpha \lambda_f^x + \beta \lambda_f^y)}_{\lambda \in K} f$$

Or $\# S_x \cup S_y < +\infty$.

Donc $\alpha x + \beta y \in \langle \mathcal{F} \rangle$. $\square$.

Def : Soit E un ev, $\mathcal{F} \subset E$. On dit que

- $\mathcal{F}$ est generatrice si $\langle \mathcal{F} \rangle = E$
- $\mathcal{F}$ est libre si $\forall \{\lambda_f, f \in \mathcal{F}\}$ à support fini,

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f = 0 \implies \lambda_f = 0 \ \forall f.$$

- $\mathcal{F}$ est une base si $\mathcal{F}$ est génératrice et libre.

Exemples : • $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \in \mathbb{R}^d$

La famille $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base.

• La famille $(1, X, \ldots, X^n, \ldots$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

• La famille $(\delta_i := (0 - 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0 \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$ base de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

• Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fct de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$), les fonctions $(1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ sont libres.

• Dans $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, les fct $(1, x, \ldots, x^n, \ldots)$ ne sont pas libres.

Exo : $(1, x, \ldots, x^p)$ est il libre ?

• Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $(t \mapsto e^{ct})_{c \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

• Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, les fonctions $(t \mapsto e^{ct})_{c \in \mathbb{C}}$ est une famille libre.

Prop : $\mathcal{F}$ est libre ssi tout élément de $\langle \mathcal{F} \rangle$ a une unique écriture comme CL de $\mathcal{F}$: $\forall (\lambda_f), (\mu_f)$ à supports finis,

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f f \iff \forall f \in \mathcal{F}, \lambda_f = \mu_f.$$

Prop : Soit E un K-ev :

• Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset E$ et $\mathcal{F}'$ est libre, $\mathcal{F}$ est libre.

• Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset E$ et $\mathcal{F}$ est génératrice, $\mathcal{F}'$ est génératrice.

• Si $\mathcal{F}$ est une base et $f \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \setminus \{f\}$ n'est pas génératrice.

• Si $\mathcal{F}$ est une base et $f \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cup \{f\}$ n'est pas libre.

Preuve : 1. Si $0 = \sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f$, $\{\lambda_f\}$ à support fini, comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, les $f \in \mathcal{F}'$. Comme $\mathcal{F}'$ est libre, $\lambda_f = 0 \ \forall f$. Donc $\mathcal{F}$ est libre.

2. Idem : $\forall x \in E$, $x = CL(\{f\}, f \in \mathcal{F})$ par hypothèse. Or $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ donc $x = CL(\{f\}, f \in \mathcal{F}')$.

3. Soit $\mathcal{F}$ une base, $f \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est libre,

$$f \neq CL(\{f'\} \quad f' \in \mathcal{F} \setminus \{f\}).$$

Donc $f \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{f\})$

Donc $\mathcal{F} \setminus \{f\}$ n'est pas génératrice.

4. Soit $\mathcal{F}$ une base, $f \notin \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est génératrice,

$$f = CL(\{f', f' \in \mathcal{F}\})$$

Donc $f - CL(\{f', f' \in \mathcal{F}\}) = 0$ et c'est une CL de $\mathcal{F} \cup \{f\}$ à coefficients non tous-nuls puisque $f \notin \mathcal{F}$ (donc le coefficient devant f est exactement 1). Donc $\mathcal{F} \cup \{f\}$ n'est pas libre. □.

__Corollaire :__ Une base est une partie génératrice minimale et une partie libre maximale.

__Th__ : Tout K-ev admet une base.

__Preuve :__ • Commençons par le cas où on a une partie génératrice finie de E (on dit que E est de dim finie, of partie suivante). Dans ce cas, soit $\mathcal{F}$ une partie génératrice finie.

→ Si $\mathcal{F}$ est libre c'est une base.

→ Sinon, il existe une $CL(\{f, f \in \mathcal{F}\})$ à coeff(ts) non-tous nuls qui vaut 0 :

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f = 0 \ , \quad \lambda_{f_0} \neq 0 \text{ pour un certain } f_0 \in \mathcal{F}.$$

Comme K est un corps, λ_{f_0} inversible, donc

$$f_0 = \sum_{f \in \mathcal{F} \setminus f_0} \frac{-\lambda_f}{\lambda_{f_0}} f .$$

Soit alors $x \in E$:
$$\begin{aligned} x &= CL(\{f, f \in \mathcal{F}\}) \\ &= CL(f_0, \{f, f \in \mathcal{F} \setminus f_0\}) \\ &= CL(CL(\{f, f \in \mathcal{F} \setminus f_0\}, \{f, f \in \mathcal{F} \setminus f_0\}) \\ &= CL(\{f, f \in \mathcal{F} \setminus f_0\}). \end{aligned}$$

Donc $F \setminus f_0$ est encore génératrice.

→ Si $F \setminus f_0$ est libre, $F \setminus f_0$ est une base.

→ Sinon, on recommence l'étape 2 ci-dessus : $\exists f_1 \in F \setminus f_0$ tq

$F \setminus \{f_0, f_1\}$ est génératrice.

→ Le processus se termine nécessairement après un nombre fini d'étapes puisque F est finie.

Donc $\exists f_0, f_1, \dots, f_k$ tq $F \setminus \{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ est une base.

- Lorsqu'il n'$\exists$ pas de partie finie génératrice, il faut remplacer la finitude dans l'argument précédent. On utilise alors le lemme de Zorn :

Lemme de Zorn : Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

> Un ensemble inductif étant un ensemble (partiellement) ordonné dans lequel toute chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) possède un majorant.

Soit alors $\mathcal{L} := \{$parties libres de $E\}$

- $\mathcal{L}$ est partiellement ordonné par la relation d'inclusion
- Si $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ est une chaîne c'est à dire que $\forall \mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{L}'$,

$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Alors $F' := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}'} \mathcal{F}$ est évident un majorant de $\mathcal{L}'$ et cet ensemble de E est libre. En effet, si

$$CL(f', f' \in F') = 0,$$

puisque $F' = \cup \mathcal{F} = \{f \in E \mid \exists \mathcal{F} \in \mathcal{L}' \mid f \in \mathcal{F}\}$ et qu'une CL est toujours à support fini, $\exists \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \in \mathcal{L}'$ tq la CL ci-dessus est en fait $CL(f', f' \in \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n) = 0$.

Mais puisque $\mathcal{L}'$ est une chaîne, quitte à réindicer ces parties, on a $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$ donc $\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n$. Donc en fait ici :

$\exists n \mid 0 = CL(f', f' \in F') = CL(f', f' \in \mathcal{F}_n)$

Or $\mathcal{F}_n$ est libre donc Supp $CL = \emptyset$ donc F' libre. Donc $F' \in \mathcal{L}$.

L'ensemble $\mathcal{L}$ est donc inductif, donc admet un élément maximal $\mathcal{F}$. Alors :

→ $\mathcal{F}$ libre puisque $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$

→ $\mathcal{F}$ est gatrice car si ce n'était pas le cas, $\exists e \in E /$ $e \notin \text{Vect}\, \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \cup \{e\}$ libre d'après le th précédent. Donc $\mathcal{F} \cup \{e\} \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{F} \cup \{e\} \supsetneq \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas maximale ds $\mathcal{L}$.

On en déduit finalement que $\mathcal{F}$ est une base. ∎.

Commentaire : La notion de base est essentielle en dimension finie et quasi-inutile en dim infinie. La preuve ci-dessus doit donc être comprise surtout en dim finie.

En fait les preuves précédentes montrent plus :

Th (de la base incomplète) :

ⓑ. De toute partie gatrice on peut extraire une base

ⓐ. Toute partie libre peut-être complétée en une base.

Preuve : . En dimension finie (qd $\exists$ partie gatrice finie $\mathcal{G}$ de E)

ⓑ on l'a déjà fait ci-dessus

ⓐ Soit $\mathcal{F}$ famille libre.

→ si $\text{Vect}\, \mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ alors $\text{Vect}\, \mathcal{F} \supset \text{Vect}\, \mathcal{G} = E$

Donc $\mathcal{F}$ gatrice donc $\mathcal{F}$ base.

→ Sinon $\exists g \in \mathcal{G} /$ $g \notin \text{Vect}\, \mathcal{F}$. Alors : $\mathcal{F} \cup \{g\}$ est encore libre. En effet, si $CL(g, \mathcal{F}) = 0$: $\exists \lambda_g, \lambda_f$ presque tous nuls tq

$$\lambda_g g + \sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f = 0.$$

Si $\lambda_g = 0$: $\sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f f = 0$, $\mathcal{F}$ libre $\Rightarrow \lambda_f = 0 \quad \forall f$. Contradict.

Donc $\lambda_g \neq 0$, donc inversible ($\lambda_g \in K$ corps).

Donc $g = -\sum \frac{\lambda_f}{\lambda_g} f$ donc $g \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{F}$. Contradiction.

Donc $\mathcal{F} \cup \{g\}$ libre.

$\to$ On peut recommencer : $\mathcal{F} \cup \{g_1, \dots, g_\ell\}$ finit par engendrer puisque $\mathcal{G}$ génératrice (au pire $\ell = \# \mathcal{G} < +\infty$).

- En dimension infinie : on refait la même preuve que ci-dessous (avec le lemme de Zorn) en prenant :

ⓑ $\mathcal{L} := \{$parties libres de E incluses dans $\mathcal{G}\}$

ⓐ $\mathcal{L} := \{$parties libres de E qui contiennent $\mathcal{F}\}$. $\square$

Rque : Une certaine partie du travail sur les espaces vectoriels peut être effectuée lorsque K n'est pas un corps mais un anneau. (on parle de A-modules). Mais ces théorèmes sur les bases nécessitent l'inversion d'éléments de K, donc ne seront pas valables dans les A-modules.

Corollaire : Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire

$\forall F < E,\ \exists G < E \ /\ F \oplus G = E$.

Preuve : Puisque F est un ev, il admet une base $\mathcal{B}_F$. Cette famille est libre sur K, donc libre dans E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E qui contient $\mathcal{B}_F$. Posons alors $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F$ et

$G := \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F)$.

Alors
- $F + G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_F) + \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F)$

$= \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F) = \mathrm{Vect}\, \mathcal{B}_E = E$

- Si $x \in F \cap G$: $x = \sum_{f \in \mathcal{B}_F} \lambda_f f = \sum_{g \in \mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F} \lambda_g g$

Donc $\sum_{\mathcal{B}_F} \lambda_f f - \sum_{g \in \mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F} \lambda_g g = 0$

Or $\mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}_E \setminus \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E$ base donc libre donc $\forall f\ \lambda_f = 0$, $\forall g\ \lambda_g = 0$

Donc $x = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc $F \oplus G = E$ $\square$

TD : Espaces quotients, preuve de a) à partir de l'existence de bases.

2 - Dimension :

Def : Un K-ev est de dim finie s'il existe une partie generatrice finie. Sinon on dit qu'il est de dimension ∞.

Th : Soit E un K-ev de dim finie. Alors :

1. Il existe une base finie
2. Toutes les bases ont même cardinal.

$\Rightarrow$ La dimension de E est le cardinal d'1 base de E.

Preuve : 1. Soit $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_n)$ une partie gatrice finie.

D'après le theoreme de la base incomplète version G, il existe une base extraite de $\mathcal{E}$, donc finie.

2. Soient $\mathcal{B} := (e_1 \ldots e_n)$, $\mathcal{B}' := (e'_1, \ldots, e'_m)$ deux bases de E.

On va prouver que $m \geq n$.

Comme $\mathcal{B}'$ base, $\mathcal{B}'$ gatrice donc

$$\begin{cases} e_1 = CL(e'_1, \ldots, e'_m) \\ e_2 = CL(e'_1, \ldots, e'_m) \\ \vdots \\ e_n = CL(e'_1, \ldots, e'_m) \end{cases} \rightarrow e'_{i_1} = CL(e_1, \{e'_j\}_{j \neq i_1})$$

$$\rightarrow \begin{cases} e_2 = CL(e_1, \{e'_j\}_{j \neq i_1}) \\ \vdots \\ e_n = CL(e_1, \{e'_j\}_{j \neq i_1}) \end{cases}$$

Puisque $(e_1 \ldots e_n)$ est libre, toutes les CL contiennent des e'_j

$$\rightarrow e'_{i_2} = CL(e_1, e_2, \{e'_j\}_{j \neq i_1, i_2})$$

$$\rightarrow \begin{cases} e_3 = CL(e_1, e_2, \{e'_j\}_{j \neq i_1, i_2}) \\ \vdots \\ e_n = CL(e_1, e_2, \{e'_j\}_{j \neq i_1, i_2}) \end{cases}$$

Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ libre, ttes les CL doivent avoir des e'_j.

Mais si $m < n$, comme on enlève un (e'_j) à chaque étape, on finira par $e_n = CL(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ impossible.

Donc $m \geq n$. Donc $\# \mathcal{B}' \geq \# \mathcal{B}$. Comme ceci est vrai pour tout couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, on a aussi

$\# \mathcal{B} \geq \# \mathcal{B}'$, donc $\# \mathcal{B} = \# \mathcal{B}'$. $\square$

Thm :
- Si $F < E$, $\dim F \leq \dim E$. Si $\dim F = \dim E < +\infty$ alors $F = E$.
- Pour $F < E$, on note $\operatorname{codim} F := \dim E - \dim F \geq 0$.
- Si $F \oplus G = E$, $\dim F + \dim G = \dim E$, cad $\dim G = \operatorname{codim} F$.

Preuve :
- C'est le theorem de la base incomplete : une base $\mathcal{B}_F$ de F peut être complétée en une base $\mathcal{B}_E$ de E, donc
$$\dim F = \# \mathcal{B}_F \leq \# \mathcal{B}_E = \dim E.$$

- Si $F \oplus G = E$, $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de F et G, on a evident

  → $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ gatrice

  → Et si $\sum \lambda_f f + \sum \mu_g g = 0$, $\underbrace{\sum \lambda_f f}_{\in F} = - \underbrace{\sum \mu_g g}_{\in G}$

  Donc $\sum \lambda_f f = \sum \mu_g g = 0$ Donc $\lambda_f = \mu_g = 0 \ \forall f, g$, donc $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ libre.

  → Donc $\dim E = \# \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \# \mathcal{B}_F + \# \mathcal{B}_G = \dim F + \dim G$ $\square$.

Thm : $\dim F \times G = \dim F + \dim G$.

Preuve : Soit $\mathcal{B}_F$ base de F
$\mathcal{B}_G$ base de G.

Definissons $\mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G := \{ (f, 0), f \in \mathcal{B}_F \} \cup \{ (0, g), g \in \mathcal{B}_G \} \subset F \times G$.

Alors :
- $\# \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G = \# \mathcal{B}_F + \# \mathcal{B}_G$
- $\mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$ est generatrice car : $\forall x, y \in F \times G$,
$$x = \sum_{f \in \mathcal{B}_F} \lambda_f f, \quad y = \sum_{g \in \mathcal{B}_G} \mu_g g$$
$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$
$$= \sum \lambda_f (f, 0) + \sum \mu_g (0, g)$$
- $\mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$ est libre : Si
$$\sum \lambda_f (f, 0) + \sum \mu_g (0, g) = (0, 0)$$
$$\|$$
$$(\sum \lambda_f f, 0) + (0, \sum \mu_g g)$$
$$\|$$
$$(\sum \lambda_f f, \sum \mu_g g)$$
Donc $\sum \lambda_f f = 0$ et $\sum \mu_g g = 0$

Puisque $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ st libres, $\lambda_f = 0 = \mu_g \ \forall f, g$

Donc $\mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$ libre. $\square$

3. Applications linéaires :

Thm : Soit E, F deux K-ev et $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$.

1.a Si $\mathcal{E} \subset E$ est une partie libre et ϕ injective alors $\mathcal{F} := \phi(\mathcal{E})$ est libre ds F.

b. Si ϕ envoie toute famille libre sur une famille libre, ϕ est injective.

2.a. Si $\mathcal{E} \subset E$ est génératrice et ϕ surjective alors $\mathcal{F} := \phi(\mathcal{E})$ est génératrice.

b. Si ϕ envoie une partie génératrice sur une partie génératrice alors ϕ est surjective.

3. a Si ϕ est un isomorphisme et $\mathcal{B}_E$ base de E alors $\phi(\mathcal{B}_E)$ base de F.

b. Si ϕ envoie une base de E sur une base de F, c'est un isomorphisme.

Preuve : Tout est à peu près évident :

1.a Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ injective et $\mathcal{E} \subset E$ libre.

Si $\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e \phi(e) = 0$ alors $\phi\left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e e\right) = 0$.

Puisque ϕ est injective, ceci implique $\sum \lambda_e e = 0$

Donc $\lambda_e = 0 \ \forall e$. Donc $\phi(\mathcal{E})$ libre.

1.b : si ϕ envoie toute famille libre sur une famille libre,

$\forall x \neq 0$, $\{x\}$ est libre donc $\{\phi(x)\}$ libre donc $\phi(x) \neq 0$. Donc $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ donc ϕ injective.

2.a : Soit $\mathcal{E} \subset E$ génératrice. Puisque ϕ surjective, $\forall y \in F$,

$\exists x \in E \ / \ \phi(x) = y$. Or $\mathcal{E}$ génératrice donc

$x = \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e e$ donc $\phi(x) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e \phi(e)$

Donc $\forall y$, $\exists \lambda_e$ presque tte nulle tq $y = \sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e \phi(e)$

Donc $\phi(\mathcal{E})$ génératrice.

b. Si $\operatorname{Im} \phi \supset \mathcal{G}$ partie génératrice, puisque $\operatorname{Im} \phi < G$,

$\operatorname{Im} \phi \supset \operatorname{Vect}(\mathcal{G}) = G$ [puisque ce dernier est le + petit sev qui contient $\mathcal{G}$].

Donc ϕ surjective.

3. a : Si ϕ isomorphisme (injective et surjective), β base (libre et génératrice), d'après 2a et 2b, $\phi(\beta)$ est libre et génératrice donc une base.

b. Si ϕ envoie une base de E β_E sur une base de F β_F.

Par 2b, ϕ surjective. Il suffit donc de mq ϕ est injective, cad que $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$.

Si $\phi(x) = 0$, on écrit $x = \sum_{e \in \beta_E} \lambda_e e$ ($\{\lambda_e\}$ presque nulle)

Donc $0 = \phi(x) = \sum_{e \in \beta_E} \lambda_e \phi(e) = \sum_{f \in \beta_F} \lambda_{\phi^{-1}(f)} f$

Or β_F est une base donc $\lambda_{\phi^{-1}(f)} = 0$ $\forall f$ donc $\lambda_e = 0$ $\forall e$
Donc $x = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ donc ϕ injective. $\square$.

Corollaire : . Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, $\dim E = \dim F$.

. Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ injective, $\dim E \leq \dim F$.

. Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective, $\dim E \geq \dim F$.

Preuve : . Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ injective. Soit β_E base de E : $\phi(\beta_E)$ libre.

Donc : → si $\dim E = +\infty$, $\# \beta_E = +\infty$, F admet une partie libre de cardinal infini, qu'on peut compléter en base (donc de cardinal infini) donc $\dim F = +\infty$ et donc $\dim E \leq \dim F$

→ Si $\dim E < +\infty$: $\# \beta_E = \dim E$, $\phi(\beta_E)$ libre, donc peut être complétée en une base β_F de F. Donc $\# \beta_F \geq \# \beta_E$ Donc $\dim F \geq \dim E$.

. Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective. Soit β_E base de E : $\phi(\beta_E)$ génératrice.

→ Si $\dim F = +\infty$ alors $\# \phi(\beta_E) = +\infty$ donc $\# \beta_E = +\infty$ donc $\dim E \geq \dim F$

→ Si $\dim F < +\infty$, On peut extraire de $\phi(\beta_E)$ une base donc

$\dim F \leq \# \phi(\beta_E) = \# \beta_E = \dim E$.

. Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective, on a donc $\dim F \leq \dim E \leq \dim F$

Donc $\dim E = \dim F$. $\square$.

Def : Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$. Le rang de ϕ est
$$rg(\phi) := \dim \operatorname{Im} \phi$$

Theoreme du rang : Soit E un Kev de dim finie, F Kev.
$\forall \quad \phi \in \mathcal{L}(E,F), \quad rg\,\phi + \dim \operatorname{Ker} \phi = \dim E.$

Plus precisément, pour tout supplémentaire G de $\operatorname{Ker}\phi$, càd $\forall\, G < E$ tq
$$G \oplus \operatorname{Ker}\phi = E,$$
On a $\phi_{|G} : G \longrightarrow \operatorname{Im}\phi$ est un isomorphisme.

Preuve : Soit E un K ev de dim finie, F K ev et $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$.
D'après les theoremes précédents (en dim finie suffisent),
$\exists\ G < E$ tq $\quad G \oplus \operatorname{Ker}\phi = E$. Posons $\Psi := \phi_{|G}$. Alors :

- $\operatorname{Ker}\Psi = \{0\}$. En effet, si $\Psi(x) = 0$, $\phi(x) = 0$ avec $x \in G$.
  Donc $x \in \operatorname{Ker}\phi \cap G = \{0\}$ par hypothese.
  Donc $\operatorname{Ker}\Psi = \{0\}$.
- $\operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Im}\phi$. En effet, $\operatorname{Im}\Psi \subset \operatorname{Im}\phi$ puisque $\Psi = \phi_{|G}$.
  De plus, si $y \in \operatorname{Im}\phi$, $\exists\ x \in E \ /\ \phi(x) = y$.
  Decomposons alors $x = x_G + x'$ avec $x' \in \operatorname{Ker}\phi$, $x_G \in G$.

  On a donc $\phi(x) = y = \phi(x_G) + \phi(x') = \phi(x_G) = \Psi(x_G)$.
  Donc $y \in \operatorname{Im}\Psi$ donc $\operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Im}\phi$.

Finalement, $\phi_{|G}\ G \longrightarrow \operatorname{Im}\phi$ est injective et surjective donc un isomorphisme. Donc $\phi_{|G}$ envoie base de G en base de $\operatorname{Im}\phi$
Donc $\#\mathcal{B}_G = \#\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\phi}$ Donc $\dim G = \dim \operatorname{Im}\phi = rg\,\phi$.
Finalement, puisque $\operatorname{Ker}\phi \oplus G = E$, on a
$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}\phi + \dim G = \dim \operatorname{Ker}\phi + rg\, G. \quad \square.$$

Corollaire : Si $F, G < E$: $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

Preuve (exercice) : Soit $\phi : \begin{array}{l} F \times G \longrightarrow E \\ (f,g) \longmapsto f+g \end{array}$. Alors :

- $\mathrm{Im}\,\Phi = F + G$ par définition
- $\mathrm{Ker}\,\Phi \simeq F\cap G$: si $(f,g) \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, on a $f+g=0$

  Donc $f=-g$ donc $f \in F\cap G$.

  De plus, $\begin{array}{ccc}\mathrm{Ker}\,\Phi & \longrightarrow & F\cap G \\ (f,g) & \longmapsto & f\end{array}$ est un isomorphisme

  d'inverse $f \in F\cap G \longmapsto (f,-f)$.

- D'après le théorème du rang, on a donc

$$\underbrace{\dim \mathrm{Ker}\,\Phi + \mathrm{rg}\,\Phi}_{\dim F\cap G \,+\, \dim(F+G)} = \dim(F\times G) = \dim F + \dim G$$

$\square$.

Corollaires du théorème du rang: Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E, \dim F < +\infty$.

- Si $\dim E = \dim F$, u injective $\iff$ u surjective
-

Exercices:

- $\mathbb{R}_n[X]$:
  → $(1, X, \dots, X^n)$ base
  → Degrés échelonnés.
  → Polynômes de Lagrange
  → $\dim \mathbb{R}[X] = +\infty$.
  → Opérateur de dérivation, ex de supplémentaires th du rg.
  → Opérateurs d'évaluations
  → Splines cubiques.
- Bases drapeaux: $(e_1 - e_n)$ famille libre $\Rightarrow$ $e_1, e_2 + \alpha_{21} e_1, e_3 + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 \dots$ libre.
- familles de fct° libres : $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, voire $\lambda \in \mathbb{C}$.