Espaces vectoriels.

Rappel: Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux lois internes : $+$, $\cdot$ telles que:

- $(\mathbb{K},+)$ est un groupe commutatif :
  - $\rightarrow \exists\, 0 \;/\; x+0 = x \quad \forall x$
  - $\rightarrow \forall x,\ \exists\, -x$ tq $x+(-x) = 0$ (on note alors $x-y := x+(-y)$)
  - $\rightarrow x+y = y+x$
  - $\rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$
- $(\mathbb{K}\setminus 0, \cdot)$ est un groupe commutatif (ici la commutativité n'est pas tjs requise mais ds notre cours si)
  - $\rightarrow \exists\, 1 \;/\; x\cdot 1 = x \quad \forall x$
  - $\rightarrow \forall x\ \exists\ 1/x$ tq $x\cdot\frac{1}{x} = 1$
  - $\rightarrow x\cdot y = y\cdot x$
  - $\rightarrow (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$
- Compatibilité des deux lois :
  - $\rightarrow x\cdot 0 = 0 \quad \forall x$
  - $\rightarrow (x+y)\cdot z = xz + yz$.

Exples de corps:

- $\rightarrow \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- $\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier. $\Big\}$ à voir éventuellemt plus tard.
- $\rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
- $\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : \{0,1\}$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

I - Espaces vectoriels :

Def : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-ev si il est muni :

- D'une loi interne $+$ pour lequel $(E,+)$ groupe commutatif
- Une loi externe $\cdot : \mathbb{K}\times E \longrightarrow E$, $(\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda.\vec{v}$

Pour lesquelles on a les compatibilités suivantes :

→ $\lambda.(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ $(\Rightarrow \lambda.\vec{0}=\vec{0}, \ \lambda(-\vec{x}) = -\lambda\vec{x})$

→ $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$. $(\Rightarrow 0.\vec{x}=\vec{0})$

→ $1.\vec{x} = \vec{x}$

→ $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda.(\mu\vec{x})$

$\mathbb{K}$ est appelé le corps de base de l'ev E, ou corps des scalaires.

Exemples :

1. K est un $\mathbb{K}$ev
2. $\mathbb{R}^d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_d \end{pmatrix}, \ x_i \in \mathbb{R} \right\}$ avec $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \\ x_d+y_d \end{pmatrix}$ $\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ | \\ \lambda x_d \end{pmatrix}$.
3. $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{[0,1]} := \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$.ev

   avec $\begin{cases} f+g\,(x) = f(x)+g(x) \\ (\lambda.f)\,(x) = \lambda f(x) \end{cases}$
4. + galement, si X ensemble quelconque,

   $K^X := \{ f : X \longrightarrow K \}$ est un Kev avec les lois

   $\begin{cases} f+g\,(x) = f(x)+g(x) \\ (\lambda.f)\,(x) = \lambda f(x). \end{cases}$
5. L'ensemble des suites à valeurs ds K :

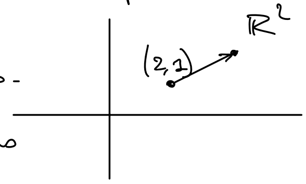
   $K^{\mathbb{N}} := \{ (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots) \quad u_i \in K \}$

   est un K-ev. C'est un cas particulier du cas précédent avec $X = \mathbb{N}$.

- Exo : le cas 2 est un cas particulier du cas 4 avec X = ensemble fini à d éléments.

⑥ $K[X]$ ou $K_n[X]$ (polynômes sur K avec borne sur le degré ou sans).

⑦ Un exemple géométrique : $\mathbb{A}^d$ l'espace affine des points de coordonnées $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ (ou K^d).



→ additionner des points n'a aucun sens.

→ Mais $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ est l'ensemble des vecteurs de translation :

$$P = (x_1^P \dots x_d^P) \;,\; Q = (x_1^Q, \dots, x_d^Q) :$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_1^Q - x_1^P \\ \vdots \\ x_d^Q - x_d^P \end{pmatrix} =: Q - P$$

Alors $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

→ Vérification : $\overrightarrow{\mathbb{R}^d_{\text{affine}}} = \mathbb{R}^d$ du ②.

<u>Prop</u> : Si F, G sont des K-ev, $F \times G$, muni des opérations :

- $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
- $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

est un espace vectoriel

<u>Rque</u> : C'est un exemple fondamental : les $\mathbb{R}^d$ ci-dessus sont de ce type

<u>Preuve</u> : . Le fait que $(F \times G, +)$ est un groupe commutatif a dû être vu au premier semestre.

. $\lambda[(x,y) + (x',y')] = \lambda(x+x', y+y')$

$= (\lambda(x+x'), \lambda(y+y'))$ (par def de $(F \times G, \cdot)$)

$= (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y')$ (car F, G ev)

$= (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y')$ (par def de $(F \times G, +)$)

$= \lambda(x,y) + \lambda(x',y')$ (par def).

. $(\lambda + \mu)(x,y) = ((\lambda+\mu) f, (\lambda+\mu) g)$ (par def de $(F \times G, \cdot)$

$= (\lambda f + \mu f, \lambda g + \mu g)$ (car F, G ev)

$= (\lambda f, \lambda g) + (\mu f, \mu g)$

$= \lambda(f,g) + \mu(f,g)$.

- $1.(f,g) = (1.f, 1.g) = (f,g)$
- $\lambda.(\mu.(f,g)) = \lambda(\mu f, \mu g) = (\lambda.(\mu f), \lambda.(\mu g)) = (\lambda\mu f, \lambda\mu g) = \lambda\mu(f,g)$ $\square$

<u>Combinaisons linéaires:</u> Soit E un K-ev, $x_1, \dots, x_\ell \in E$. Une combinaison linéaire des x_i est un élément

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i \quad , \lambda_i \in K.$$

Si on se fiche des λ_i, on peut ecrire $x = CL(x_i)_{i=1..\ell}$.

⚠ Une CL est TOUJOURS une somme finie!

II - Applications linéaires.

Def: (Morphismes d'espaces vectoriels) : E, F des K-espaces vectoriels

$\phi : (E,+,\cdot) \longrightarrow (F,+,\circ)$ est un morphisme d'ev si :

- $\forall x, y, \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
- $\forall \lambda, x, \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$.

ϕ est aussi appelée application linéaire entre E et F.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de ces applications linéaires.

On note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Rques :
- $\phi(-x) = \phi((-1).x) = -1.\phi(x) = -\phi(x)$ Donc ϕ morphisme des groupes $(E,+)$ vers $(F,+)$.
- les deux pts sont équivalents à : $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall x, y \in E,$

$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$

- $\mathcal{L}(E,F)$ n'a de sens que si E et F sont des espaces vectoriels sur le m̄ corps de base K.

Prop: Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x = CL(\{x_i\}_{i=1,\dots,\ell})$. Alors

$u(x) = CL(\{u(x_i)\})$.

En m̄ : $x = \sum \lambda_i x_i \Rightarrow u(x) = \sum \lambda_i u(x_i)$.

Def: On dit que $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ isomorphisme si ϕ bijective.
On note
$GL(E) := \{\phi \in \mathcal{L}(E,E) \ / \ \phi \text{ isomorphisme}\}$.

Prop : Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, $\phi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Preuve: On doit mq ϕ^{-1} est linéaire.

- $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$ donc $\phi^{-1}(\phi(\lambda x)) = \phi^{-1}(\lambda \phi(x))$, donc

$\forall x \in E, \quad \phi^{-1}(\lambda \phi(x)) = \lambda x$.

Comme ϕ surjective, $\forall y, \exists x \ / \ y = \phi(x)$. En appliquant l'égalité précédente :
$\phi^{-1}(\lambda y) = \lambda \phi^{-1}(y)$.

- $\phi(x+x') = \phi(x) + \phi(x') \rightsquigarrow x + x' = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(x')) \quad \forall x, x' \in E$.

Si alors $y, y' \in F$, $x = \phi^{-1}(y)$, $x' = \phi^{-1}(y')$:

$\phi^{-1}(y + y') = x + x' = \phi^{-1}(y) + \phi^{-1}(y')$ □.

Théorème : $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ injective ssi $\mathrm{Ker}\,\phi := \phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Preuve : . comme $\phi(0) = 0$: ($\Rightarrow$) évident.

. Rep, si $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$, $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow \phi(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. □

Prop : E, F des K-ev.

- $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-ev
- $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ est une K-algèbre : c'est un K-ev muni d'une loi de multiplication en plus : $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ où $u \circ v$ est la composition.

  On a alors $(\lambda u + \mu v) \circ w = \lambda u \circ w + \mu v \circ w$
  $w \circ (\lambda u + \mu v) = \lambda w \circ u + \mu w \circ v$

  ⚠ $u \circ v \neq v \circ u$.
- $GL(E)$ est un groupe pour la loi de composition.

  ⚠ $GL(E)$ n'est pas un ev.

Def (Conjugaison, équivalence) : Soient E, F des K-ev, $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On dit que u et v st équivalentes si $\exists\, \varphi \in GL(E)$, $\psi \in GL(F)$ tq $u = \psi^{-1} \circ v \circ \varphi$
- Si $E = F$, on dit que u et v sont semblables si $\exists\, \varphi \in GL(E)$ tq $u = \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi$.

On représente :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ E & \xrightarrow{v} & F \end{array} \quad : v = \psi \circ u \circ \varphi^{-1}.$$

Cela signifie que, quitte à changer de point de vue à la source et à l'arrivée par un isomorphisme de la structure, les AL u et v st les mêmes. Pour la relation de conjugaison, on ne s'autorise qu'à regarder avec des lunettes différentes, mais on ne change pas de lunettes au départ et à l'arrivée.

Exemples : • $D : K[X] \longrightarrow K[X]$
$P = a_0 + \dots + a_n X^n \longmapsto P'(X) := a_1 + 2a_2 X + \dots + n a_n X^{n-1}$

• $x_1 : K^d \longrightarrow K$ $\in \mathcal{L}(K^d, K)$
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_d \end{pmatrix} \longmapsto x_1$

• $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
$(u_0, u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$

• Ex : $D : K_n[X] \longrightarrow K_n[X]$ et $\tilde{D} : K^{n+1} \longrightarrow K^n$ sont conjuguées.
$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ n a_n \end{pmatrix}$

$\Phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$
$P \longmapsto P(1)$ sont équivalentes.
et $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum a_i$

Mais Φ et $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} a_0 \\ | \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_0$

sont aussi équivalentes.

III. Sous-espaces vectoriels :

Def : Soit E un K-ev. Un sous-espace vectoriel F de E est une partie $F \subset E$ telle que :

- $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$
- $\forall x \in F, \lambda \in K, \quad \lambda x \in F.$

$\iff \forall \lambda, \mu \in K, \ x, y \in F \quad \lambda x + \mu y \in F.$

On notera $F < (E, +, \cdot)$

Évidemment, un sous-ev d'1 K-ev est un K-ev.

Exemples :
- $C^0([a,b], \mathbb{R}) < (\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \cdot) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \}$
- $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} := \{ (x_0, \dots, x_n, \dots) \ / \ x_n \longrightarrow 0 \} < \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$
- $a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}$. (ou K)

  $\{ (u_n) \ / \ u_{n+1} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \} < \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$

Prop : Soit E un Kev, $\mathcal{F} \subset E$. $\operatorname{Vect} \mathcal{F} := \{ CL(\{f\}_{f \in \mathcal{F}}) \}$. Alors $\operatorname{Vect} \mathcal{F} < E$.

Preuve : Si $x, y \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$, $\lambda, \mu \in K$, $\quad x = \sum_{i \in I} a_i f_i$ (I fini) $\ y = \sum_{i \in J} b_i f_i$

Pour $i \in J \setminus I$, on pose $a_i = 0$, $i \in I \setminus J$, $b_i = 0$. $I \cup J$ fini et
$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{I \cup J} a_i f_i + \mu \sum_{i \in I \cup J} b_i f_i = \sum_{i \in I \cup J} (\lambda a_i + \mu b_i) f_i = CL(f_i) \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. $\square$

Prop : Soient E, F des K-ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$

- $\operatorname{Ker} u := u^{-1}(0) = \{ x \in E \ / \ u(x) = 0 \} < E$
- $\operatorname{Im} u := u(E) = \{ u(x), \ x \in E \} < F.$

Preuve : exercice.

Def : Si $F, G < E$, on note $F + G := \{ f + g, \ f \in F, \ g \in G \}$.

Prop : Soient $F, G < E$. Alors :

- $F \cap G$ et $F + G$ sont des sev de E.
- $F + G = \operatorname{Vect}(F \cup G)$

Exercice : $F \cup G$ n'est un sev de E que si $F \subset G$ ou $G \subset F$ (auquel cas $F \cup G = G$ ou F).

Preuve de la prop : Exercice.

En fait plus génl : $F_\alpha < E$, $\alpha \in A$.

$$\underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha := \{ x_1 + x_2 + \dots + x_n,\quad x_1 \in F_{\alpha_1}, \dots, x_n \in F_{\alpha_n},\quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \}.$$

(les sommes finies d'éléments des divers F_α).

Prop : $F_\alpha < E$, $\alpha \in A$, $\underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$ et $\underset{\alpha\in A}{\cap} F_\alpha$ st des sev de E. De plus, $\underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha = \mathrm{Vect}\left(\underset{\alpha\in A}{\cup} F_\alpha\right)$.

Preuve : • Si $x, y \in \underset{\alpha\in A}{\cap} F_\alpha$, alors $\forall \alpha$, $x, y \in F_\alpha$ donc $\lambda x + \mu y \in F_\alpha$

Donc $\lambda x + \mu y \in \cap F_\alpha$ donc $\cap F_\alpha < E$.

• Si $x, y \in \underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$: $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$, $\{x_\alpha\}$ presque tous nuls

$y = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha$, $\{y_\alpha\}$ presque tous nuls

Donc $\lambda x + \mu y = \sum_{\alpha\in A} \lambda x_\alpha + \mu y_\alpha = \sum_{\alpha\in A} z_\alpha$, avec

→ $z_\alpha = \lambda x_\alpha + \mu y_\alpha \neq 0$ seult si x_α ou $y_\alpha \neq 0$ donc nbre fini de tels α, donc $\{z_\alpha\}$ presque tous nuls

→ $z_\alpha \in F_\alpha$ car $F_\alpha < E$.

Donc $\lambda x + \mu y \in \underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$ donc $\underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha < E$.

• Finalt, comme $\underset{\alpha\in A}{\cup} F_\alpha \subset \underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$, et $+ F_\alpha < E$,

$\mathrm{Vect}\left(\underset{\alpha\in A}{\cup} F_\alpha\right) \subset \underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$.

De plus $\underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha = \{ \sum f_\alpha,\ \alpha \in A, \{f_\alpha\} \text{ presque tous nuls} \}$

$\subset \{ CL(f),\ f \in \cup F_\alpha \} = \mathrm{Vect}\left(\underset{\alpha\in A}{\cup} F_\alpha\right)$.

donc $\mathrm{Vect}\left(\underset{\alpha\in A}{\cup} F_\alpha\right) = \underset{\alpha\in A}{+} F_\alpha$.

$\square$.

Def : Soit E un ev et $F, G < E$. On dit que :

• F est en somme direct avec G si $F \cap G = \{0\}$. On note alors $F + G = F \oplus G$

• F, G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Ex : • $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) + \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Vect}\, e_1 \oplus \mathrm{Vect}\, e_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \neq \mathbb{R}^3$ ...

• Soient E, F des Kev. $E \simeq E \times \{0\} \subset E \times F$

$F \simeq \{0\} \times F \subset E \times F$

et $E \times \{0\} \oplus \{0\} \times F = E \times F$.

• Si $u(x) = \lambda_x x \quad \forall x$ alors $u = \lambda \, Id$. (dilatation).

• Projections, symétries.

• Si $\phi : E \to F$ est une AL bijective, ϕ^{-1} est linéaire.

Exercices :

→ $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ ev

→ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ corps

→ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ corps

→ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ev sur $\mathbb{Q}$.

→ $\phi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ isomorphisme.

$(1, \sqrt{2}) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

• Endomorphismes particuliers : projection, nilpotents