Calcul matriciel

I Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$: matrices.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Rappelons que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ont des bases canoniques dt les vecteurs sont notés e_i.

⚠ le e_i de $\mathbb{R}^n$ a n entrées alors que le e_i de $\mathbb{R}^m$ en a m.

Alors on peut écrire $u(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, u(e_m) = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \\ a_{nm} \end{pmatrix}$.

Le tableau de nombres $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire u. C'est un tableau de type (n,m).

On la note $\mathrm{Mat}(u)$.

Prop: Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix}$, on a

$$u(x) = \mathrm{Mat}(u) X = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m \end{pmatrix}$$

Preuve: $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i u(e_i)$ par linéarité

$$= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \right) e_j$$

$$= \mathrm{Mat}(u) X. \qquad \square$$

De façon condensée : $u(x) = \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \right)_{j=1,\dots,n} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)_{i=1,\dots,n}$.

Def: On définit $M_{n,m}(K)$ l'ensemble des matrices de type (n,m) (n lignes, m colonnes). Alors $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longleftrightarrow \mathrm{Mat}(u) \in M_{nm}(K)$.
Si $A \in M_{nm}(K)$, on note A_{ij}, ou souvent a_{ij} ses entrées.

Si $n = m$, on raccourcit en $M_n(K)$: $\mathrm{End}(K^n) \simeq M_n(K)$.

Si $n = m$, on note $GL_n(K) := \mathrm{Aut}(K^n) := \{ u \in \mathrm{End}(K^n) \text{ inversibles} \}$.

Prop : Pour $A, B \in M_{n,m}(K)$, et $\lambda \in K$, on définit :

- $$\lambda . \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & & \lambda a_{mm} \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mm}+b_{mm} \end{pmatrix}$$

Alors, $Mat(\lambda u + \mu v) = \lambda Mat(u) + \mu Mat(v)$.

Preuve : exercice.

Remarque : on ne peut ajouter que des matrices de m̂ type !

Prop : Pour $A \in M_{nm}(K)$ et $B \in M_{mp}(K)$, on définit

$$A . B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1m}b_{mp} \\ \vdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mm}b_{m1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mm}b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{ij} \in M_{np}(K).$$

Alors si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$, on a :

$$Mat(u \circ v) = Mat(u) . Mat(v)$$

Preuve : Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. On pose $Mat(u) = A$, $Mat(v) = B$ et $Mat(u \circ v) = C$

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = u\left(\sum_{j=1}^{p} b_{ij} x_j \right) \leftarrow i = u \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) \leftarrow i \downarrow n$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} a_{ik} b_{kj} x_j \right) \leftarrow i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right) x_j \right) \leftarrow i = \left(\sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_j \right) \leftarrow i$$

On en conclut que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj}$ $\square$.

Un autre opération algébrique sur les matrices, dont la significat° géométrique devient claire lorsqu'on parle de dualité, la transposition.

__Def__ : (transposition) : Si $A \in M_{n,m}(K)$, ${}^tA \in M_{m,n}(K)$ est défini par

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji}.$$

__Prop.__ Si $A \in M_{n,m}(K)$, $B \in M_{m,p}(K)$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

__Preuve__ :

$$\begin{aligned}({}^tB\,{}^tA)_{ij} &= \sum_k ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} \\ &= \sum_k B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_k A_{jk} B_{ki} = (AB)_{ji} = ({}^t(AB))_{ij}. \qquad \square\end{aligned}$$

Finalement, si $u \in GL_n(K)$, $A = Mat(u)$, on note $A^{-1} := Mat(u^{-1})$.
La matrice A^{-1} est donc caractérisée par

$$AX = Y \iff A^{-1}Y = X.$$

__CAD__ : si on pose $A^{-1} := (a'_{ij})$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 = a'_{11}y_1 + \dots + a'_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a'_{n1}y_1 + \dots + a'_{nn}y_n \end{array}\right.$$

Donc trouver les a'_{ij} revient à résoudre un système linéaire de n équat° à n inconnues.

Il s'agit d'une procédure coûteuse (coût à calculer ci-dessous).

__Prop__ (Calcul par bloc) :

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow k \\ \updownarrow \ell \end{array} \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{k} & \xleftrightarrow{\ell} \end{array} & \end{array} \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + CG & AF + CH \\ \hline BE + DG & BF + DH \end{array}\right)$$

(pourvu que les dimensions des blocs permettent le calcul)

__Preuve__ : Exercice.

I - Systèmes linéaires :

Rappelons qu'un système linéaire à n équat°, m inconnues s'écrit :

$$E(A,y)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1m}x_m = y_1\\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nm}x_m = y_n \end{cases}$$

où les (a_{ij}) sont des coeffts fixés (des paramètres)

les $(y_i)_{i=1..n}$ st des données (eventuellt le pb se posera pour plusieurs jeux de données)

les $(x_j)_{j=1,..m}$ st les inconnues.

Alors en posant $A := \left(a_{ij}\right)_{i=1..n,\ j=1..m}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$,

ce système d'équation se réécrit

$$AX = Y, \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ X \in \mathbb{R}^m,\ Y \in \mathbb{R}^n.$$

autrement dit :

<u>Prop</u>: x solution de $(E) \Longleftrightarrow AX = Y \Longleftrightarrow X \in A^{-1}(\{y\})$.

1 - Résultats théoriques :

Avec ce que l'on sait déjà sur les applications linéaires (Thm du rang en particulier), on obtient déjà le résultat théorique suivant.

Thm : • Si x_0 solution de $E(y)$ alors l'ensemble des solut° est l'espace affine $x_0 + \ker A$.

• L'ensemble des $y \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels existe au moins une solution à $E(y)$ est de dimension $d \leq m$. Et l'ensemble des solutions à y fixé ds cet espace est un espace affine de dimension $m-d$. En particulier :

→ si $n > m$, l'ensemble de ces y est de dimension $< n$. et cet ensemble est de dimension $m-k$ si l'ensemble des solutions à $E(y)$ est de dimension k

→ si $n < m$: si $E(y)$ a des solutions, l'ensemble des solutions a dimension $m-d \geq m-n > 0$.

→ si $n = m$: $E(y)$ a une solution $\forall y$ ssi cette solution est unique $\forall y$.

<u>Preuve:</u> • $E(y)$ admet des solutions ssi $\exists x /\ Ax = y$
$\iff y \in \mathrm{Im}\, A$.

donc $\{y /\ E(y)$ admet des solut$\} = \mathrm{Im}\, A$ = sev de $\mathbb{R}^m$, dont on note la dimension d.

• De plus, si x_0 est solution de $E(y)$, x est solut de $E(y)$
ssi $x - x_0$ solut de $E(0)$
$\iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}\, A$
$\iff x = x_0 + \mathrm{Ker}\, A$.

Par définit la dimension d'1 espace affine est celle de son espace tangent, ici $\mathrm{Ker}\, A$.

• D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = n$.
Donc $\dim \mathrm{Ker}\, A = n - d$. et $d \leq m$.

• Alors si $n > m$, $d = \dim \mathrm{Im}\, A \leq m < n$ et si $d = n - k$
alors $\dim \mathrm{Ker}\, A = k$

• Si $n < m$, comme $\mathrm{Im}\, A \subset \mathbb{R}^m$, $d = \dim \mathrm{Im}\, A \leq n$, donc

$\dim \mathrm{Ker}\, A = m - d > n - d \geq 0$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, A > 0$.

• Si $n = m$, on a déjà vu que le th du rang montre que l'injectivité équivaut à la surjectivité. □.

2 - Pivot de Gauss, décomposition LU, décomposition PLU

On s'intéresse à présent à la résolution pratique du système $E(A,y)$.

Un cas particulièrement simple est celui des matrices triangulaires:

Algorithme (si A triangulaire supérieure à diagonale non nulle:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{mm} \\ 0 & & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$: $E(y)$ n'a de solut° que pour $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$

  et résolut°: $a_{mm} x_m = y_m \longrightarrow x_m$

  $a_{m-1\,m-1} x_{m-1} = y_{m-1} - a_{m-1\,m} x_m \longrightarrow x_{m-1}$

  ....

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \ddots & a_{nn} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$: $E(y)$ a des solut° $\forall y$.

  On fixe $x_{n+1} = \cdots = x_m$ qcq. Puis:

  $a_{nn} x_n = y_n - \sum_{i=n+1}^{m} a_{ni} x_i \rightarrow x_n$

  ...

Remarquons que cette classe de matrice est stable par multiplication;

Th : Un produit de matrices triangulaires supérieures (ou inf) est triangulaire supérieure (ou inférieure).

Preuve (exercice): $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$ $B \in M_{mp}(\mathbb{R})$ triang supérieures.

Signifie donc $A_{ij} = 0$ pour $i > j$
$B_{ij} = 0$ $i > j$

Alors $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

Donc si $i > j$: Soit $k < i$ alors $a_{ik} = 0$
Soit $k \geq i$ alors $k \geq i > j$ donc $b_{kj} = 0$.

Donc $(AB)_{ij} = 0$ $\square$.

De l'algorithme de résolution ci-dessus, on tire aussi:

Th: si $n = m$, une matrice triangulaire supérieure à diagonale non nulle est inversible, d'inverse triangulaire supérieure.
+ Précisément:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Preuve: On a vu que:

$a_{nn} x_n = y_n \longrightarrow x_n = a_{nn}^{-1} y_n$

$a_{n-1\,n-1} x_{n-1} = y_{n-1} + CL(x_n) = y_{n-1} + CL(y_n)$ donc $x_{n-1} = a_{n-1\,n-1}^{-1} y_{n-1} + CL(y_n)$

... $x_k = a_{kk}^{-1} y_k + CL(y_i,\ i > k)$.

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. $\square$

Pb : quelle est la traduction matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss ?

<u>Lemme:</u> Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, dénotée $A = \begin{pmatrix} C_1 - C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ | \\ L_n \end{pmatrix}$.

(Les C_i sont des vecteurs colonnes de taille n, les L_i des vecteurs lignes de taille m.)

Pour $i \neq j$, définissons $T_{ij}(t) = id + t(\delta_{ij}) = \begin{array}{cc} & j \\ \begin{pmatrix} 1 & & t \\ & \searrow & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$

Alors $A . T_{ij} = \begin{pmatrix} C_1 .. & \underset{\uparrow j}{C_j + tC_i}, & .. C_m \end{pmatrix}$

$T_{ij} . A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_i + tL_j \\ L_n \end{pmatrix} \leftarrow i$

<u>Preuve :</u> Rappelons que la k-ième colonne d'une matrice A est le vecteur Ae_k.

Donc :
- $T_{ij}(e_k) = e_k \quad \forall k \neq j$
- $T_{ij}(e_j) = e_j + te_i$.

Par conséquent,
- $\forall k \neq j$, $A.T_{ij} e_k = Ae_k$, donc la $k°$ colonne de AT_{ij} est la même que la $k°$ colonne de A : C_k
- $AT_{ij} e_j = A(e_j + te_i) = Ae_j + tAe_i$ Donc la $j°$ colonne de AT_{ij} est $C_j + tC_i$.

Donc $AT_{ij} = \begin{pmatrix} C_1 .. & \underset{\uparrow j}{C_j + tC_i}, & ... C_m \end{pmatrix}$.

Puis ${}^t(T_{ij}A) = {}^tA\, {}^tT_{ij} = {}^tA\, T_{ji} = \begin{pmatrix} {}^tL_1, \dots, {}^tL_n \end{pmatrix} T_{ji}$

$= \begin{pmatrix} {}^tL_1, .. {}^tL_i + t\,{}^tL_j, ... {}^tL_n \end{pmatrix}$

$= {}^t\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + tL_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \leftarrow i.$ $\square$.

<u>Exercice:</u> - Calcul matriciel direct, Calcul de $T_{ij}A$ direct.

Rappel de la méthode du pivot :

- **Cas simple :** a_{11}, puis a'_{22}, puis ... sont non-nuls et servent de pivot (cas générique).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 & L_1 \\ \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n. & L_n \end{cases}$$

Si a_{11} pivot : $\circ$ $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \dots$

$\circ$ $y_2 \leftarrow y_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} y_1$, $y_3 \leftarrow y_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} y_1, \dots$

En termes matriciels : $T_{n1} \cdots T_{31} T_{21} A = T_{n1} \cdots T_{21} Y$. $\left(T_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)\right)$

On obtient alors un système :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \text{——} + a_{1n}x_n = y_1 \\ 0 \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = y'_2 \\ | \quad a'_{32}x_2 + \dots + a'_{3n}x_n = y_3 \\ \quad \vdots \\ 0 \end{cases}$$

On utilise a'_{22} comme pivot :

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2, \quad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} L_2 \dots$$

En termes matriciels donc : $T_{n2} \cdots T_{32} T_{n1} \cdots T_{21} A = T_{n2} \cdots T_{32} T_{n1} \cdots T_{21} A$

$\dots \quad T_{nn-1} T_{n-1\,n-2} T_{n-1\,n-3} \cdots \qquad A = \dots$

Remarquons alors que les T_{ij} impliqués vérifient $i > j$ donc sont toutes triangulaires inférieures. Le produit des T_{ij} impliquées est donc une matrice triangulaire inférieure, notée L' (Lower triangular) :

$$L'A = L'Y.$$

De plus, une fois le processus effectué,

$L'A$ associée au système $\begin{cases} a'_{11}x_1 + \text{——} + a'_{1n}x_n = y'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = y'_2 \\ \quad \ddots \end{cases}$

Donc LA est triangulaire supérieure.
On appelle alors $U := L'A$ (upper triangular).

Corollaire : Si A est une matrice pour laquelle la suite des pivots $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \dots a^{(n-1)}_{nn}$ sont tous non nuls, alors

$A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec 1 sur diag
U ——— supérieure avec

éléments diagonaux non-nuls.

__Preuve :__ $L'A = U$ donc $A = L'^{-1} U$.

On L' triangulaire inférieure avec 1 sur diag.

$\Rightarrow L = L'^{-1}$ $\underline{\hspace{6cm}}$. $\square$

__Remarques :__ • D'un point de vue algorithmique, on n'a pas besoin d'inverser L, seulement U :

$$AX = Y \iff LAX = LY \iff UX = LY \iff X = U^{-1}LY. \square$$

• Le cas où ces pivots sont non-nuls, A est nécessairement de rang $\max(n,m)$ (on dit qu'elle est de rg maximal).

• Cas où A est de rang maximal $\max(n,m)$:

Dans ce cas on va devoir faire intervenir un nouveau type de matrices, appelées de permutations.

__Def :__ Soit $\sigma \in S_n$ une permutation à n éléments. On définit :

- $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, étendue par linéarité.
- $P_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ par $P_\sigma = \text{Mat}(u_\sigma) = (\delta_{i\sigma(j)})$ où

  δ est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
  $= 1$ si $i = j$

__Exercice :__ MQ $\text{Mat}(u_\sigma) = (\delta_{i\sigma(j)})$.

__Lemme :__ • Si $A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} L_1 \\ | \\ L_n \end{pmatrix}$, $P_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$P_\sigma A = \begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

• si $A \in M_{mn}(\mathbb{R}) = (C_1 — C_n)$, $P_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$$

__Preuve :__ Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow A \in M_{mn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AP_\sigma = \text{Mat}(u \circ u_\sigma) &= (u \circ u_\sigma(e_1), \dots, u \circ u_\sigma(e_n)) \\ &= (u(e_{\sigma(1)}), \dots, u(e_{\sigma(n)})) \\ &= (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

$\square$

Revenons à notre système d'équations
On ne suppose plus que les pivots sont $a_{11}, \dots, a_{mm}^{(m)}$.
Dans ce cas, l'algorithme fonctionne de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mm} x_m = y_m \end{cases}$$

↳ si $a_{11} \neq 0$: a_{11} est le pivot

↳ si $a_{11} = 0$: si $\exists i$ tq $a_{i1} \neq 0$, on échange les lignes 1 et i : D'après le lemme ci-dessus, ceci revient à multiplier A à droite par la matrice de permutation associée à la transposition $1 \leftrightarrow i$: $P := P_{\tau(1,i)}$

Ensuite $(PA)_{11}$ est le pivot

↳ soit $\forall i$ $a_{i1} = 0$. Dans ce cas, on cherche les pivots devant les x_2. (donc on passe directement à l'étape suivante).

Autrement dit : la gestion du pivot associé à x_1 :

→ soit s'écrit $L_1 P_1 A = \begin{cases} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1m} x_m = y'_1 \\ a'_{22} x_2 + \dots \\ \vdots \end{cases}$

→ soit $A = \begin{cases} 0 x_1 + \boxed{x_2 \dots x_m} \end{cases}$

↳ Puis on passe au pivot associé à x_2 : ce qui se fait comme précédemment.

↳ Après avoir répété l'opération tant qu'on peut la faire, on obtient :

$$L_k P_k \dots L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$ ← upper triangular, cette fois avec certains éléments diagonaux pouvant être nuls.

Il reste à remarquer que $P_2 L_1 = L_1 P_2$. Ceci est dû au fait que P_2 permute les lignes 2 et k avec $k \geq 2$ alors que L_1 transforme les lignes $L_2, \dots, L_m$ en $L_i - \alpha_i L_1$.
Le faire dans un ordre ou l'autre revient évidemment au même. Donc

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = L_2 L_1 \underbrace{P_2 P_1}_{\text{permutation}} A$$

Finalement on obtient donc $LPA = U$ donc $A = P^{-1} L^{-1} U$
Or $P^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$, donc P^{-1} est une matrice de permutation.

<u>Corollaire</u> : (décomposition PLU) : toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ admet une décomposition $A = PLU$ avec :

- $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure
- $L \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale
- $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

<u>Remarque</u> : Encore une fois il n'est pas utile de calculer L, P : l'algorithme fournit L^{-1} et P^{-1} et ce sont eux qui sont importants en pratique

TD sur machine : programmation de la méthode LU et PLU.

III - Trace, déterminant :

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on va définir

- un déterminant, qui est exactement le déterminant de l'endomorphisme $u \in End(\mathbb{R}^n)$ associé
- une trace : la somme des termes diagonaux.

1. Trace :

Def : Soit $A \in M_n(K)$

$$Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Prop : $Tr : M_n(K) \longrightarrow K$ est linéaire

Preuve : évident.

Lemme : $Tr(AB) = Tr(BA) \qquad (A, B \in M_n(K))$
$Tr({}^tA) = Tr(A)$.

Preuve :
$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} && \text{(commutativité)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} && \text{(chgt d'indice } i \leftrightarrow k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = Tr(BA) \end{aligned}$$
□

Corollaire : $Tr(PAP^{-1}) = Tr\, A$

Preuve : $Tr(PAP^{-1}) = Tr((PA)P^{-1}) = Tr\, P^{-1}(PA) = Tr\, P^{-1}PA = Tr\, A$ □

Exercice : Si $\varphi : M_n(K) \longrightarrow K$ est linéaire et vérifie

$$\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A) \quad \forall A \in M_n(K), P \in GL_n(K)$$

alors $\exists \alpha \in K$ tq $\varphi = \alpha\, Tr$.