Applicat° du déterminant, endomorphismes remarquables, réduction.

0. Rappel sur les rapports entre AL et matrices.

- E, F 2 $\mathbb{K}$-ev de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$

  Si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ sont deux bases de E et F respectivement

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = A = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}\begin{array}{c} e_1 \; \cdots \; e_m \\ \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

  et a_{ij} déterminé par $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$.

  Changt de Base : $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E', \mathcal{B}_F') = P \, \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \, Q$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_m(\mathbb{K})$

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = \mathrm{Mat}(u_A, \mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{can})$ où

  $u(x) := Ax$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$.

- Quand $u \in \mathcal{L}(E)$:

  $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$.

  $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E') = P \, \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E) P^{-1}$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

  ↳ $\det u := \det \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ dépend pas de $\mathcal{B}$

  $\mathrm{Tr}\, u := \mathrm{Tr}\, \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ dépend pas de $\mathcal{B}$

- On dit que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ st equivalentes

  si $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}), Q \in GL_m(\mathbb{K}) \,/\, A' = PAQ$

  $\iff A' = \mathrm{Mat}(u_A, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ où $\mathcal{B}_1$ base de $\mathbb{K}^m$, $\mathcal{B}_2$ —— $\mathbb{K}^n$

  (autrement dit, si A' est la matrice de l'AL $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ dans des bases differentes)

- On dit que $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblable si $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq

  $A' = P^{-1} A P$

  $\iff A' = \mathrm{Mat}(u_A, \mathcal{B}')$ $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{K}^n$.

1. Rang et déterminant

Rappel: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg} A = n \iff \det A \neq 0$.
Question : peut-on aller plus loin ?

Def: Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $I \subset \{1,\dots,n\}$, $J \subset \{1,\dots,m\}$,

$$\mathrm{Ext}(A,I,J) := \left(A_{ij}\right)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \in M_{|I|,|J|}(\mathbb{K})$$

(on biffe de A les lignes et colonnes de numéro pas dans I, pas dans J)

On dit que $\mathrm{Ext}(A,I,J)$ est une matrice extraite de A.

Prop: Soient $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1,\dots,n\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_{p'}\} \subset \{1,\dots,m\}$

Soit $\pi_I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_{i_1} \\ \vdots \\ y_{i_p} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Inj}_J : \mathbb{K}^{p'} \to \mathbb{K}^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p'} \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p'} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j_1 \\ \\ \leftarrow j_2 \\ \\ \leftarrow j_{p'} \\ \\ \end{array}$

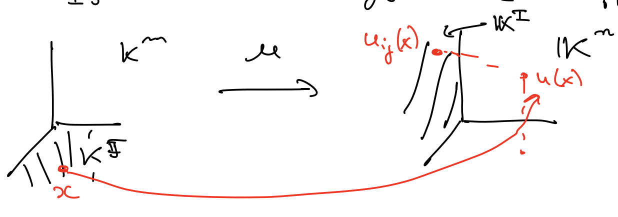
[Rque : $\pi_J \circ \mathrm{Inj}_J = id$ mais $\mathrm{Inj}_J \circ \pi_J \neq id$]

Alors $\pi_I \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^I)$, $\mathrm{Inj}_J \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{p'}, \mathbb{K}^m)$ et

$$\mathrm{Ext}(A, I, J) = \pi_I \, A \, \mathrm{Inj}_J$$

En termes d'endomorphismes : si $u_{IJ} : \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}^J$ l'endo associé à $\mathrm{Ext}(A,I,J)$ et u celui associé à A, on a

$$u_{IJ} = \pi_I \circ u \circ \mathrm{Inj}_J = \pi_I \circ u|_{\mathbb{K}^J}.$$



Preuve: (matrice)

$$\pi_I A \,\mathrm{Inj}_J \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p'} \end{pmatrix} = \pi_I A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow j_1 = \pi_I \begin{pmatrix} \sum_1^{p'} a_{i j_{p'}} x_{p'} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_1^{p'} a_{i j_{p'}} x_{p'} \end{pmatrix} \Big\} \begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_p \end{array}$$

et $\mathrm{Ext}(A, I, J) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p'} \end{pmatrix}$ = la même chose.

□.

Preuve n°2 : (Endomorphisme) :

$$\pi_I \circ u \circ In_{J} (e_k) = \pi_I \circ u (e_{j_k}) = \pi_I (C_{j_k}) = Ext_I (C_{j_k})$$
$$= k^{o} \text{ colonne de } Ext(A, I, J)$$
$$= u_{IJ}(e_k)$$

Donc $\pi_I \circ u \circ In_J$ et u_{IJ} coïncident sur une base,
donc $\pi_I \circ u \circ In_J = u_{IJ}$ □.

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

$\operatorname{rg} A = \max \{ k \,/\, \exists I, J,\ |I| = |J| = k \,/\, \det Ext(A, I, J) \neq 0 \}$
Autrement dit le rg d'une matrice est la taille maximale d'une extraction carrée de A de déterminant non nul

Preuve : (Exo 13) : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $r := \operatorname{rg} A$,
$K := \max \{ k \,/\, \exists I, J,\ |I| = |J| = k \,/\, \det Ext(A, I, J) \neq 0 \}$.
On procède par double inégalité : $r \geq K$ et $r \leq K$:

- $r \geq K$: Soient I, J avec $|I| = |J| = K$ tq
$Ext(A, I, J) \in GL_K(\mathbb{K})$.

Affirmation : En écrivant $A = (C_1, \dots, C_m)$, la famille $(C_j, j \in J)$ de $\mathbb{K}^n$ est libre.

En effet, Si $\sum_{j \in J} \alpha_j C_j = 0$, on a : $\forall i \in [1, n]$,
$$\sum_{j \in J} \alpha_j a_{ij} = 0$$
Donc $\forall i \in I$, $\sum_{j \in J} \alpha_j a_{ij} = 0$
Donc $Ext(A, I, J) \begin{pmatrix} \alpha_{j_1} \\ \vdots \\ \alpha_{j_K} \end{pmatrix} = 0$.

Comme $Ext(A, I, J)$ inversible, $\alpha = 0$. □.

Par conséquent,
$$r = \operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_m) \geq \dim \operatorname{Vect}(C_j)_{j \in J} = K$$
Donc $r \geq K$.

• $\underline{r \leq K}$: Puisque $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 - C_m)$, les vecteurs $(C_1, -, C_m) \in \mathbb{K}^n$ engendrent $\operatorname{Im} A$, donc on peut en extraire une base de $\operatorname{Im} A$, $(C_{j_1}, --, C_{j_r})$ (de # $\dim \operatorname{Im} A = r$)

On pose $|J| = (j_1 - j_r)$. Alors $u_A \circ \operatorname{Inj}_J : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^n$ de rg r.

On a alors $A . \operatorname{Inj}_J = (C_{j_1}, .., C_{j_r}) =: (C'_1, .., C'_r)$

et ces vecteurs st libres ds $\mathbb{K}^n$.

$\underline{\text{Affirmation}}$: $\exists\, e_{k_1}, -, e_{k_{n-r}} \in \mathbb{K}^n$ des vecteurs de la base canonique tels que $(C'_1, -, C'_r, e_{k_1}, -, e_{k_{n-r}})$ base de $\mathbb{K}^n$.

En effet, si $(C'_1, -, C'_r)$ engendre $\mathbb{K}^n$ on a gagné puisque libres. Sinon, $\exists\, e_{k_1}$ tq $e_{k_1} \notin \operatorname{Vect}(C'_1, -, C'_r)$ (sinon $\operatorname{Vect}(C'_1 - C'_r)$ contiendrait $(e_1, -, e_n)$ donc leur vect, cad $\mathbb{K}^n$). Donc $(C'_1, -, C'_r, e_{k_1})$ libre. Et puis on continue. $\square$

Posons alors $I = {}^c K$. Les sev $\underbrace{\operatorname{Vect}(e_i)_{i \in I}}_{E_I}$ et $\underbrace{\operatorname{Vect}(e_k)_{k \in K}}_{E_K}$ sont en sommes directes et

$$E_I \oplus E_K = \mathbb{K}^n .$$

Posons alors $\forall j \in [1, r]$, décomposons alors $C'_j := C'_{jI} + C'_{jK}$

(cad $V_I = \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_n \end{pmatrix}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{i_1} \\ 0 \\ v_{i_k} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_K = \begin{pmatrix} v_{k_1} \\ 0 \\ v_{k_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$

Alors $(C'_{1I} + C'_{1K}, \dots, C'_{rI} + C'_{r,K}, e_{k_1} - e_{k_{n-r}})$ base de $\mathbb{K}^n$, donc $(C'_{1I}, -, C'_{rI}, e_{k_1} - e_{k_{n-r}})$ aussi (par opérations élémentaires sur les colonnes). Donc la famille $(C'_{1I}, -, C'_{rI})$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$ donc de rang r donc une base de E_I. Or $\pi_I|_{E_I} : E_I \longrightarrow \mathbb{K}^{r = |I|}$ est évidemment un isomorphisme ($\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}$)

Donc $\pi_I(C'_{1I}, -, C'_{rI})$ base de $\mathbb{K}^r$.

Mais $\pi_I(C'_j) = \pi_I(C'_{jI})$.

Donc $\pi_I(C'_1, .., C'_r)$ base de $\mathbb{K}^r$.

Donc $\pi_I A \operatorname{Inj}_J = (\pi_I C'_1 -- \pi_I C'_r) : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ surjective
Donc bijective. Donc $\det \pi_I A \operatorname{Inj}_J = \det \operatorname{Ext}(A, I, J) \neq 0$.
Donc $K \geq r$. $\square$

2. Equivalence :

Th : Si $A \in M_{n,m}(K)$ a rang r, alors A est équivalente à la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Preuve : il suffit de trouver une base $\mathcal{B}$ de K^m et $\mathcal{B}'$ de K^n telles que $Mat(u_A, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Soit H un supplémentaire de $\ker u_A$ dans K^m :

$$K^m = \ker u_A \oplus H.$$

D'après le théorème du rang, $\dim H = r$ et $u_{A|H}$ injective.

Soit donc $\left.\begin{array}{l} (v_1, \dots, v_r) \text{ base de } H \\ (v_{r+1}, \dots, v_m) \text{ base de } \ker u_A. \end{array}\right\} (v_1 \dots v_m)$ base de K^m : $\mathcal{B}$

Puisque $u_{A|H}$ est injective, $u_A(v_1), \dots, u_A(v_r)$ libre donc on peut compléter cette famille par des vecteurs en 1 base de K^n.

$$\mathcal{B}' = (u_A(v_1), \dots, u_A(v_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$$

Alors

$$Mat(u_A, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \\ u_A(v_1) \\ \vdots \\ u_A(v_r) \\ f_{r+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} u_A(v_1), \dots, u_A(v_r), \overbrace{u_A(v_{r+1}) \dots u_A(v_m)}^{\ker u_A} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \end{array}$$

$\square$.

Donc, quitte à changer les bases de départ et d'arrivée dans lesquelles on exprime notre AL, la matrice d'une AL donnée peut être rendue très simple.

3. Réduction par similitude : (E = ev dim n)

Pb : $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une base $\mathcal{B}_E$ pour laquelle $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E)$ est la + simple possible.

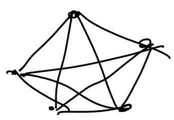
Donc trouver parmi les matrices PAP^{-1} (A fixée, $P \in GL_n(K)$ qcq) une matrice + simple que les autres.

Def : $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable si $\exists\, \mathcal{B}_E$ base de E tq

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_E) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n).$$

Rque : Si u diagonalisable, $\mathrm{Mat}(u^k, \mathcal{B}_E) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples : . G = graphe complet à n sommets : (chaque sommet est relié à ts les autres)



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ rg $A(G) = 1$ donc dim Ker $A(G) = n-1$

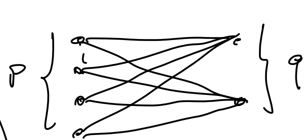
$\rightarrow$ $A(G)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \notin$ Ker

Donc $\underbrace{\mathrm{Ker}\, A(G)}_{\dim n-1} \oplus \underbrace{\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\dim 1} = \mathbb{R}^n$

Donc si $\mathcal{B} = \left(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, A(G)}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$

et $\mathrm{Mat}(A(G), \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & n \end{array}\right)$.

. G graphe biparti : $p + q = n$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ 1 & \cdots & 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{p,q} \\ 1_{q,p} & 0 \end{pmatrix}$$

Alors en écrivant $X = X_p + X_q = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_{p+q} \end{pmatrix}$,

on a $\begin{cases} u_A(X_p) = \mathbb{1}_{q,p} X_q \\ u_A(X_q) = \mathbb{1}_{pq} X_p \end{cases}$

Alors $u_A(x) = \lambda x \iff \begin{cases} x_{p+1} + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{p+1} + \dots + x_n = \lambda x_p \\ x_1 + \dots + x_q = \lambda x_{p+1} \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_q = \lambda x_n \end{cases}$

$\iff$ $\begin{cases} \to \text{soit } \lambda = 0 \text{ (cad } x \in \operatorname{Ker} u_A) \text{ et } \begin{cases} x_1 + \dots + x_q = 0 \\ x_{p+1} + \dots + x_n = 0 \end{cases} \\ \to \text{Soit } \lambda \neq 0 \text{ Alors } \begin{matrix} x_1 = \dots = x_p = x \\ x_{p+1} = \dots = x_n = y \end{matrix} \\ \quad \text{et } \begin{cases} \lambda x = yq \\ \lambda y = px \end{cases} \end{cases}$

Alors l'espace $\operatorname{Ker} u_A = \left\{ \begin{matrix} x_1 + \dots + x_q = 0 \\ x_{p+1} + \dots + x_n = 0 \end{matrix} \right\}$ codimension 2

et si $\lambda \neq 0$: $\begin{cases} \lambda x = qy \\ \lambda y = px \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda^2 x = q\lambda y = pq x \\ \lambda^2 y = p\lambda x = pq y \end{cases}$

Donc : $\to$ soit x et $y = 0$, alors $\vec{x} = 0$

$\to$ soit $\lambda = \sqrt{pq}$ et $x, y \in K$ qcq

Finalement : si $\vec{x}_p = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow p$ $\quad u_A(\vec{x}_p) = \sqrt{pq}\, \vec{x}_p$

$\vec{y}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow p$ $\quad u_A(\vec{y}_q) = \sqrt{pq}\, \vec{y}_q$

Evident, x_p, y_q st indépendants, pas ds $\operatorname{Ker} u_A$. Alors

$\mathbb{R}^n = \operatorname{Vect}(x_p, y_q) \oplus \operatorname{Ker} u_A$.

$u_A|_{\operatorname{Vect}(\vec{x}_q, \vec{y}_q)} = \sqrt{pq}\; Id, \quad u_A|_{\operatorname{Ker} u_A} = 0$

Donc ds 1 base adaptée à cette décomposition, (β) :

$\operatorname{Mat}(u_A, \beta) = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{pq}\, I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

Def : Polynôme caractéristique : $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :
On définit $\chi_u(t) = \det(u - t\,Id)$.

Prop : $\chi_u \in \mathbb{K}_n[X]$, coeff^t dominant $(-1)^n$.

Preuve : Soit $\mathcal{B}$ base de E et $A := \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.

$\chi_u(t) = \det(A - t\,Id)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A - t I_d)_{\sigma(i) i}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i) i} - t\,\delta_{i\sigma(i)})$$

À σ fixé, $\prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - t\,\delta_{i\sigma(i)})$ polynôme en t de degré $\leq n-1$ sauf si $i = \sigma(i)$ $\forall i = 1 \cdots n$ cad $\sigma = id$.

Donc $\chi_u(t) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - t)}_{\deg = n} + \underbrace{\sum_{\sigma \neq id} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - t\,\delta_{i\sigma(i)})}_{\deg_t \leq n-1}$

Donc $\chi_u \in \mathbb{K}_n[X]$ et coeff dominant de χ_u est le m̂ que celui de $\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - t)$, cad $(-1)^n$. □

Prop : les racines de χ_u sont les valeurs propres de u.

Preuve : λ valeur propre de u $\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 /\ u(x) = \lambda x$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u - \lambda Id) \neq \{0\}$

$\Longleftrightarrow \det(u - \lambda Id) = 0$

$\Longleftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0.$ □

a). Diagonalisation :

Théorème : Si χ_u est scindé à racines simples (cad $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$)
Alors u est diagonalisable.

⚠ L'hypothèse racines simples est indispensable :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = (X-1)^2$ Donc χ_A est scindé.

Mais si A était diagonalisable, ses 2 vp seraient 1 donc

$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = P\, id\, P^{-1} = id$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - faux !

Preuve : • $E_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id)$ (Espace propre associé à vp λ_i)

• Affirmation : $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$.

En effet ils sont en somme directe car si

$$x_1 + \cdots + x_n = 0, \quad x_i \in E_{\lambda_i}$$

alors $\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n x_1 + \cdots + \lambda_n^n x_n = 0 \end{cases}$

Soit alors $\mathcal{B}$ base qcq de E, $\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$. Posons alors

$x_i = \sum x_i^j e_j$. (CAD $x_i^j = j°$ coord de x_i ds base $(e_1 \ldots e_n)$)

Alors en prenant la $j°$ coord de chacun des x_i, on a :

$$\begin{Bmatrix} x_1^j + \cdots + x_n^j = 0 \\ \lambda_1 x_1^j + \cdots + \lambda_n x_n^j = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} x_1^j + \cdots + \lambda_n x_n^j = 0 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \det \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

car $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$

Donc $x_1^j = \cdots = x_n^j = 0$. Ceci étant vrai $\forall j$, on a bien $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Donc la somme est directe.

Puis comme $\dim E_{\lambda_i} \neq 0$, $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$ Donc

$n \leq \sum \dim E_{\lambda_i} \leq \dim E = n$. Donc inégalité est une égalité, donc $\dim E_{\lambda_i} = 1$ $\forall i$ et $E = \oplus E_{\lambda_i}$

• Soit alors $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ où $e_i \in E_{\lambda_i} \setminus 0$. Alors $\mathcal{B}$ base de E car cardinal n et cette famille est libre. Alors

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\square$.

Ne pas faire cet exemple.

Ex : . $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \chi_A(t) = (2-t)(1-t) - 1 = t^2 - 3t + 1$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \to \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \lambda_\pm$$

Donc χ_A scindé à racines simples, donc A diagonalisable

Alors $A\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_\pm + y_\pm = \lambda x_\pm \\ x_\pm + y_\pm = \lambda y_\pm \end{cases}$ $\quad (E_\pm)$

Et puisque λ_+, λ_- choisis tels que l'espace de solut° est de dimension 1, ces systèmes d'équat° $(E_\pm)$ équivalent à

$$x_\pm + y_\pm = \lambda y_\pm \iff x_\pm = (\lambda_\pm - 1) y_\pm .$$

Donc $v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ càd $v_+ = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_- = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: si $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$: $AX_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n + x_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

si $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

Alors $\chi_A(t) = -t(1-t) - 1 = t^2 - t - 1$

$$\Delta = 5 \hookrightarrow \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \lambda_\pm$$

Alors 2 vecteurs propres $v_\pm$ et $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\, v_+ \oplus \mathrm{Vect}\, v_-$

De plus $v_\pm = \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix}$ solut° de $\begin{cases} y_\pm = \lambda_\pm x_\pm \\ x_\pm + y_\pm = \lambda_\pm x_\pm \end{cases}$ $\quad (E_\pm)$

Mais les systèmes (E_+) et (E_-) ont solut° de dim 1 donc les deux équat° sont liées, donc

$$E_\pm \iff y_\pm = \lambda_\pm x_\pm \to v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}$$

Alors $x_0 = a$, $x_1 = b$, on écrit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha v_+ + \beta v_-$

et $X_n = A^{n+1} X_0 = \alpha \lambda_+^{n+1} v_+ + \beta \lambda_-^{n+1} v_-$

On $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ donc $x_n = \alpha \lambda_+^{n+1} v_+ + \beta \lambda_-^{n+1} v_-$

Rque : . $|\lambda_+| > 1$ donc $\lambda_+^{n+1} \longrightarrow +\infty$
. $|\lambda_-| < 1$ donc $\lambda_-^{n+1} \longrightarrow 0$. $\Big\}$ donc $x_n \sim \alpha \lambda_+^{n+1} v_+$.

b) - Trigonalisation :

Déf : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure).

Prop : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie χ_u est scindé, cad $\chi_u(t) = \prod (t - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors u est trigonalisable.

Rques : . Un corps $\mathbb{K}$ est alg clos si tout polynôme sur $\mathbb{K}$ admet une racine. ex : $\mathbb{C}$ est alg clos.

. Si $\mathbb{K}$ est alg clos, tt polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé. En effet, P a 1 racine λ_1, donc la division euclidienne de P par $X - \lambda_1$ donne $P = (X - \lambda_1) Q_1 + R$ où R est degré $< \deg(X - \lambda_1)$ donc $\deg R = 0$ donc R est une constante. Alors $P(\lambda_1) = 0 = R(\lambda_1)$ donc cste $= 0$, donc $P = (X - \lambda_1) Q_1$. avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\deg Q = \deg P - 1$. En appliquant le m̂ raisonnement à Q_1, on obtient

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) Q_2, \quad \deg Q_2 = \deg P - 2$$

$$\dots \quad P = c\,(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n), \quad n = \deg P.$$

Ici les λ_i ne sont pas forcément distincts. En les regroupant on obtient la forme demandée. $\square$

. Donc la prop dit en particulier que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est trigonalisable.

Preuve de la prop :

Cas 1 : $\mathbb{K}$ est alg clos (ex : $\mathbb{C}$). On doit montrer que tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable. Soit donc $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u son polynôme caractéristique. $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$, qui est clos, donc χ_u admet 1 racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Donc $\exists\, x_1 \in E \,/\, u(x_1) = \lambda x_1$. Considérons alors E_2 un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x_1)$: $\mathrm{Vect}(x_1) \oplus E_2 = E$.

Pour $x \in E_2$, on a $u(x) = \lambda_1 x_1 + y_2$, $y_2 \in E_2$, de façon unique. On pose alors $u' \in \mathcal{L}(E_2)$ défini par $u'(x) = y_2$.

De même on peut écrire $E_2 = \mathrm{Vect}(x_2) \oplus E_3$ où $u'(x_2) = \lambda_2 x_2$.
Ceci signifie que $u(x_2) = \alpha_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\alpha_1 \in \mathbb{K}$.
De même on peut poser pour $x \in E_3$: $u'(x) = \alpha_2 x_2 + y_3$, $y_3 \in E_3$.
et $u''(x) = y_3$, $u'' \in \mathcal{L}(E_3)$. Alors $\exists x_3$ tq $u''(x_3) = \lambda_3 x_3$,
càd $u'(x_3) = \alpha_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, donc $u(x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.
Par récurrence on obtient une base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tq

$$u(x_i) = \lambda_i x_i + \sum_{j<i} \alpha_j^i x_j$$

Alors
$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \\ & \lambda_2 & \alpha_3^2 & \\ 0 & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

<u>Cas 2</u> : $\mathbb{K}$ n'est plus supposé alg clos, mais χ_u est scindé.
On reprend la preuve précédente : χ_u est scindé donc a une racine λ_1. $\rightsquigarrow$ x_1 tq $u(x_1) = \lambda_1 x_1$, puis

$$\mathrm{Vect}(x_1) \oplus E_2 = E \quad \rightsquigarrow \quad u' \in \mathcal{L}(E_2)$$

<u>Pb</u> : on ne sait plus que $\chi_{u'}$ est scindé a priori. Mais on va le démontrer.

<u>Affirmation</u> : $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)\chi_{u'}(X)$. (donc $\chi_{u'}$ est scindé)
En effet, considérons une base $\mathcal{B}' = (x_2', \dots, x_n')$ de E_2, de sorte que $\mathcal{B} := (x_1, x_2', \dots, x_n')$ soit une base de E.

Alors
$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\mathrm{Mat}(u', \mathcal{B}')} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$n-1$ \quad $n-1$

Alors
$$\mathrm{Mat}(u - t\,\mathrm{Id}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & * & * & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}(u' - t\,\mathrm{Id}, \mathcal{B}') & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Donc
$$\begin{aligned} \chi_u(t) &= \det(\mathrm{Mat}(u - t\,\mathrm{Id}, \mathcal{B})) \\ &= (\lambda_1 - t) \det \mathrm{Mat}(u' - t\,\mathrm{Id}, \mathcal{B}') \\ &= (\lambda_1 - t)\chi_{u'}(t) \end{aligned}$$ ☐

La fin de la preuve marche alors de manière identique. ☐

c. Réduction des endomorphismes des $\mathbb{R}$-ev

Puisque $\mathbb{C}$ est alg clos, $\forall E$ $\mathbb{C}$-ev, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est scindé. Alors :

- Soit χ_u est scindé à racine simple, u diagonalisable
- Soit χ_u a des racines multiples. Alors u trigonalisable.

Question : Que se passe-t-il pour les $\mathbb{R}$-ev ?

Thm : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.

① $\rightarrow$ si $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$ est scindé $\rightarrow$ soit racines simples : u diago
$\rightarrow$ soit racines multiples : u trigo

② $\rightarrow$ si $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$ pas scindé, alors

a) $\rightarrow$ soit χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Alors u est diagonalisable par blocs avec blocs de taille 1 ou 2 :

$$\exists \mathcal{B} \,/\, \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda_k & & & \\ & & & \rho_1 \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & \rho_p \begin{pmatrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ \sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$k + 2p = n$.

b) $\rightarrow$ Soit χ_u est scindé à racines multiples sur $\mathbb{C}$. Alors u est trigonalisable par blocs, avec des blocs diagonaux de taille ≤ 2 :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & 0 & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & \rho_1 \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Rques :
- ① a déjà été prouvé ds le § préc
- Dans ② les blocs diagonaux $\rho_i \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ sont des matrices de similitudes : des composées d'une rotation d'angle θ_i et de dilatation par ρ_i.

Pour prouver le théorème, on a besoin du lemme indépendant et important suivant :

Lemme : • Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$, donc $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $B = P^{-1}AP$. Alors A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$: $\exists\, Q \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, B = Q^{-1}AQ$.

• De façon générale : si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ 2 corps infinis. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables sur $\mathbb{L}$ alors elles sont semblables sur $\mathbb{K}$.