

## Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation du type

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

où  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $t$  est la variable et l'inconnue est la fonction  $t \mapsto y(t)$ .

- Ex:
- $y'(t) = y(t)$  est une équation différentielle, ce<sup>t</sup> est une solution t.c.
  - $y'(t) = y(t)^2$  :  $\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1 \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{y(t)} \right) = -1$   
 $\rightarrow \frac{1}{y(t)} = c - t \rightarrow y(t) = \frac{1}{c-t}$   
 On vérifie: si  $y(t) = \frac{1}{c-t}$ ,  $y'(t) = \frac{1}{(c-t)^2} = y(t)^2$ .
  - $y''(t) = y(t)$  :  $c e^{ct}, c' e^{-ct}$  solutions et  $c e^{ct} + c' e^{-ct}$  solutions  
 car  $(c e^{ct} + c' e^{-ct})'' = (c e^{ct} - c' e^{-ct})' = c e^{ct} + c' e^{-ct}$
  - $y'' + y = 0 \rightarrow$  const, n<sup>o</sup>t sont solutions.

### 1. Équations linéaires du premier ordre:

Équations du type  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ .  
 → linéaire car pas  $y(t)^2, y(t)^3$ , etc...  
 → premier ordre car pas de  $y''(t), \dots$

Th: (Cauchy-Lipchitz) Soit  $y_1(t), y_2(t)$  deux solutions d'  
 une équation du premier ordre (même pas linéaire).  
 Si  $\exists t_0$  tq  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  alors  $y_1 = y_2$

#### a) Équations homogènes ( $b(t) = 0$ ) $y'(t) = a(t)y(t)$ .

- Remarquons que si  $y(t_0) = 0$  alors  $y(t) = 0 \forall t$ .  
 En effet,  $y(t_0) = 0$  est solution. Donc d'après le th précédent, si  $y(t_0) = 0 = y_0(t_0)$  alors  $y = y_0$ .
- Donc si  $y(t)$  n'est pas la solution constante nulle,  $y$  ne s'annule pas. Donc  
 $\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$  donc  $[\ln y(t)]' = a(t)$   
 Donc  $\ln y(t) = A(t) + c$  où  $A(t) = \int a(t) dt$  est 1 primitive.

Donc finalement,  $y(t) = e^{A(t)t} = c' e^{A(t)} \quad (c' = e^c)$ .

Notons que si  $A(t_0) = 0$ , (donc  $A(t) = \int_{t_0}^t a(t) dt$ ) alors  $c' = y(t_0)$ .

Donc le bilan est le suivant:

Thm:  $\forall t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique solution  $y(t)$  de:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t) = a(t)y(t). \end{array} \right.$$

C'est la fonction  $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(t) dt}$ .

Ex: Résoudre  $\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = e^t y(t) \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = e^t \rightarrow \frac{d \ln y(t)}{dt} = e^t \text{ donc } \ln y(t) = e^t + \text{conste}$$

$$\text{Donc } y(t) = c e^{e^t} \quad \text{et } y(0) = 1 = c e^0 = c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Donc } y(t) = e^{e^t}$$

exercices: 1.4, 1.5 résult des 3 premières équations.

### b - Equations avec second membre ( $b(t) \neq 0$ ).

On veut résoudre  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

Remarque: si  $y_{part}$  est une solution de l'équation, et  
si  $y$  est une autre solution, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y_{part}(t) = a(t)y_{part}(t) + b(t) \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } (y - y_{part})'(t) = a(t)(y - y_{part})(t)$$

Donc  $y - y_{part}$  est solution de l'équation homogène  
(obtenue en remplaçant  $b(t)$  par 0).

Thm:  $\forall t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique solution  $y(t)$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y(t) = a(t)y(t) + b(t) \end{array} \right.$$

Celle-ci s'écrit  $y(t) = y_{part}(t) + C e^{\int_{t_0}^t a(t) dt}$

D On doit apporter pour l'instant l'hypothèse qu'il existe une fonction  $y_{part}(t)$  telle que  $y'_{part}(t) = a(t)y_{part}(t) + b(t)$

Preuve: • Pour  $C = y_0 - y_{part}(t_0)$ , on a  $y(t_0) = y_0$

• De plus, comme nous l'avons observé,

$$y'(t) = y'_{part}(t) + C a(t) e^{\int_{t_0}^t a(t) dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } y'(t) &= a(t)y_{\text{part}}(t) + b(t) + c a(t) e^{\int_a^t a(\tau) d\tau} \\ &= a(t)(y_{\text{part}} + c e^{\int_a^t a(\tau) d\tau}) + b(t) \\ &= a(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

B.

$$\underline{\text{ex: 1}} \quad \begin{cases} y'(t) = y(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{E}).$$

- solution particulière :  $y_{\text{part}}(t) = -1$ .
  - Solution de l'équation homogène  $y'(t) = y(t)$  :  $Ce^t$
- Donc  $y = -1 + Ce^t$  de plus,  $y(0) = 0 \Rightarrow C = -1$
- Donc  $y(t) = -1 + e^t$  est solution de (E)

$$2) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t) + t \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

- solution particulière :  $y(t) = -t - 1$  est solution
- Donc solution de (E) :  $y(t) = Ce^t - t - 1$   
et  $y(0) = 0 = C - 1$  donc  $C = 1$ .

$$\text{Donc } y(t) = e^t - t - 1.$$

### c) Méthode de variation de la constante:

Soit une équation  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ .

On veut une solution particulière.

Il existe une méthode pour en trouver une. La voici :

① On résout l'équation sans second membre :  $y'(t) = a(t)y(t)$   
On considère une solution de cette équation  $u(t)$ :  
 $u'(t) = a(t)u(t)$ .

② on cherche  $y_{\text{part}}(t) = \lambda(t)u(t)$  où  $\lambda(t)$  est une fonction. L'équation devient:

$$\begin{aligned} (\lambda(t)u(t))' &= a(t)\lambda(t)u(t) + b(t) \\ \text{Donc } \lambda'(t)u(t) + \lambda(t)u'(t) &= \lambda(t)a(t)u(t) + b(t). \end{aligned}$$

$$\text{Car } u'(t) = a(t)u(t)$$

$$\text{Donc } \lambda'(t)u(t) = b(t).$$

On se rappelle que  $u(t)$  ne s'annule pas.

Donc  $\lambda'(t) = \frac{b(t)}{u(t)}$ . Donc  $\lambda$  est une primitive de  $b(t)/u(t)$ .

$$\underline{\text{ex:}} \quad y'(t) = \sin t \cdot u(t) + \sin^3 t.$$

on résoud:  $u'(t) = \sin t \cdot u(t)$   
 Donc  $\ln u(t) = -\cos t$   
 Donc  $u(t) = e^{-\cos t}$

On cherche la solution particulière sous la forme  
 $y(t) = u(t) \Delta(t) = \Delta(t) e^{-\cos t}$ .

Alors  $y'(t) = u'(t) \Delta(t) + u(t) \Delta'(t) = \sin t \cdot y(t) + \sin^3 t$   
 $= \sin t \Delta(t) + \sin^3 t$   
 ou  $u'(t) \Delta(t) = \sin t \Delta(t) u(t)$   
 Donc  $u(t) \Delta'(t) = \sin^3 t$ , et  $u(t) = e^{-\cos t}$   
 Donc  $\Delta'(t) = \sin^3 t e^{\cos t}$ .

Donc  $\Delta(t) = \int \sin^3 t e^{\cos t} dt$   
 $= \int \sin^2 t e^{\cos t} \sin t dt$

chgt de var  $x = \cos t$   $\frac{dx}{dt} = -\sin t$   $\Rightarrow \int (1-x^2) e^x dx = \int x^2 e^x dx - e^x$ .

$$\text{et } \int x^2 e^x dx \stackrel{\text{IPP}}{=} [x^2 e^x] + 2 \int x e^x dx$$

$$= [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Donc  $\Delta(t) = (\cos^2 t - 2\cos t + 2)e^{\cos t}$ .

finalité une solution particulière est  $\Delta(t)e^{-\cos t} = \cos^2 t - 2\cos t + 2$

exercices 1.4, 1.5 suite et fin.

## 2. Équations différentielles à variables séparables

Ex:  $y'(t) = \frac{t}{1-y} \rightarrow y'(t)(1-y(t)) = t$   
 $\rightarrow y(t) - \frac{y(t)^2}{2} = \frac{t^2}{2} + \text{côte.}$

Donc  $y(t)^2 - 2y(t) + t^2 + c = 0$ .

$$(y(t) - 2)^2 + t^2 + c - 4 = 0 \dots$$