

Dérivées

1. Définitions:

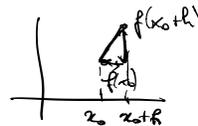
Soit $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $I \subset \text{Dom} f$ un intervalle ouvert.

Def: Soit $x_0 \in I \subset \text{Dom} f$. On suppose que f est continue en x_0 .
On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand $x \rightarrow x_0$ existe. On note alors

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interprétations: 1. $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement

de f entre x_0 et x_0+h . Le dérivé mesure donc de combien f amplifie un petit déplacement h .

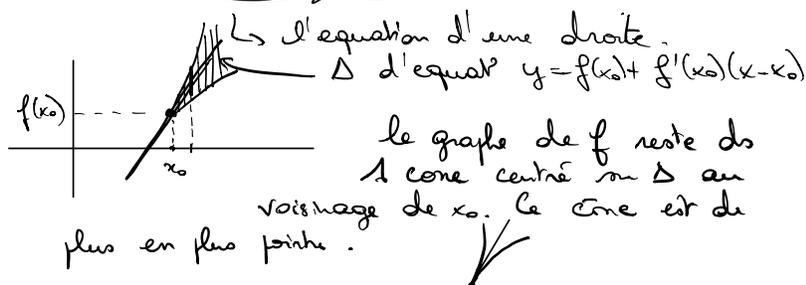


2. si $f(t)$ représente la position d'un mobile qui se déplace sur une droite, $f(t_0+h) - f(t_0)$ représente la distance parcourue par le mobile entre t_0 et t_0+h , et $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ sa vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0+h]$. $f'(t_0)$ est donc la vitesse instantanée du mobile en t_0 .

3. Notons aussi que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Donc $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hE(h)$

Alors : $\rightarrow f(x_0+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0)$ (continuité). On peut donc approcher f par une constante $f(x_0)$ proche de x_0 .
 $\rightarrow f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h}_{\Delta} + hE(h)$



Preuve: Soit $\varepsilon > 0$ et C le cone compris entre les droites $y = f(x_0) + (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)$ et $y = f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$. Pour $h < \delta$, $\varepsilon(h) \leq \varepsilon$ car $\varepsilon \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
Alors pour $h < \delta$, $f(x_0+h) = f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon(h))h \in C$. \square

- Prop:
- Si f, g dérivables en x_0 , $f+g$ et fg le sont dérivables en x_0
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 - Si $f(x_0) \neq 0$, f dérivable en x_0 , $1/f$ dérivable en x_0 , de dérivée $-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$
 - Si f dérivable en x_0 , g dérivable en $f(x_0)$ alors
 $g \circ f$ dérivable en x_0 , de dérivée $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.
 - Si f est bijective d'inverse f^{-1} , et si f dérivable en x_0 , de dérivée $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} dérivable en $f(x_0)$ de dérivée $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Preuves:

$$\frac{f+g(x_0+h) - f+g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\begin{aligned} f \cdot g(x_0+h) - f \cdot g(x_0) &= f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0)) + [f(x_0+h) - f(x_0)]g(x_0) \end{aligned}$$

Donc $\frac{f \cdot g(x_0+h) - f \cdot g(x_0)}{h} = \underbrace{f(x_0+h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)} \underbrace{g(x_0)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x_0)}$

$$\rightarrow f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right) = \frac{1}{h} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0)f(x_0+h)} = - \frac{1}{f(x_0)f(x_0+h)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} - \frac{1}{f(x_0)^2} f'(x_0)$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = - \frac{1}{f(x_0)^2} f'(x_0)$.

$$g \circ f(x_0+h) - g \circ f(x_0) = g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))$$

On pose $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h \varepsilon_f(h)$
 $g(f(x_0) + h) = g(f(x_0)) + h g'(f(x_0)) + h \varepsilon_g(h)$

où $\varepsilon_f, \varepsilon_g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$$\begin{aligned} \text{alors } g(f(x_0+h)) &= g(f(x_0) + h f'(x_0) + h \varepsilon_f(h)) \\ &= g(f(x_0) + h [f'(x_0) + \varepsilon_f(h)]) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) h [f'(x_0) + \varepsilon_f(h)] + h (\varepsilon_g(h) + \varepsilon_f(h) g'(f(x_0) + \varepsilon_f(h))) \\ &= g(f(x_0)) + f'(x_0) g'(f(x_0)) h + h (\varepsilon_g(h) + (f'(x_0) + \varepsilon_f(h)) \varepsilon_g(h)) \end{aligned}$$

Donc $\frac{g \circ f(x_0+h) - g \circ f(x_0)}{h} = f'(x_0) g'(f(x_0)) + \underbrace{\varepsilon_{g \circ f}(h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$

• Dernier point est plus difficile. Je ne le fais pas ici. \square .

2. Dérivées des fonctions usuelles

f	x^n	x^a	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln x$	$\operatorname{Arccosh} x$	$\operatorname{Arctan} x$	$\operatorname{Arccos} x$	
f'	$n x^{n-1}$	$a x^{a-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$1/x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Preuves : $\operatorname{Arccosh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arccosh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arccosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sinh^2(\operatorname{Arccosh} x)}} \stackrel{\text{D}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2} \stackrel{\text{D}}{=}$

$(x+h)^n = x^n + n h x^{n-1} + h^2 R(x, h)$

Donc $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1} + \frac{h R(x, h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + 0 \quad \square$

ex° 5, 16, 6, 7, 8, 9, 4, 3, 2, 1.

2. Fonctions dérivées

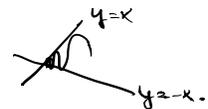
Def: Soit $f: \operatorname{Dom} f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $E \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points où f est dérivable. La fonction dérivée est $f': E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x)$.

Prop: les fonctions élémentaires (sommes, composition, multiplication, quotients de $x, \sin x, \cos x, e^x, \ln x$, fonctions inverses $\operatorname{Arccosh}, \operatorname{Arccos}, \dots$) sont dérivables sur leurs domaines de définition.

⚠ Ce n'est pas vrai en général.

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est continue en 0 mais pas dérivable en 0 : le graphe de f n'est pas coté de 1 coté de plus en plus pointu.



Def (dérivées successives): On note f'' la dérivée de f' lorsqu'elle existe. Et $f^{(n)}$ la dérivée n-ième.

ex° 17

3. Etudes de fonctions.

Exo 18, 20, 21, 22, 23, 19.