

Coréction TD1

Exercice 1: Voir le cours

Exercice 2: Données : $(I, f_n : I \rightarrow \mathbb{R})$
 Questions : f_n CNS ? f_n CVU?

1- ($I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$) :

→ CNS : On fixe x .

. Si $x \in [0, 1[$, $f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

. Si $x = 1$, $f_n(x) = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

→ CVU : Si $f_n \xrightarrow{\text{CVU}}$ g alors $f_n \xrightarrow{\text{CVU}}$ g car $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} f$,
 Par unicité de la limite, puisque $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} f$,
 On doit avoir $g = f$. Donc si f_n converge
 uniformément, elle converge uniformément vers f .

Faisons alors n et calculons $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \rho_n$

. pour $x = 1$, $|f_n(x) - f(x)| = 1 - 1 = 0$

. pour $x < 1$: $|f_n(x) - f(x)| = x^n - 0 = x^n$.
 alors $\rho_n = \sup_{x \in [0, 1[} \{x^n, x \in [0, 1[\} = 1$
 (car $x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1$)

Donc $\rho_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc f_n ne CV pas
 uniformément.

($I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$) : . $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} 0$

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sup_I |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_I x^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Donc f_n ne CV pas uniformément.

($I = [0, a]$, $a < 1$, $f_n(x) = x^n$) : . $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} 0$

$$\rho_n = \sup_I |f_n(x) - f(x)| = \sup_I \{x^n, x \in [0, a]\}$$

a $x \mapsto x^n$ est \nearrow , $\xrightarrow[0 \xrightarrow{x \rightarrow a} a]{} a^n$

$$\text{Donc } \sup_I x^n = a^n$$

Donc $\rho_n = a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $a < 1$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$ sur I .

$$2 - (I = [0, 1], f_n(x) = x^n(1-x))$$

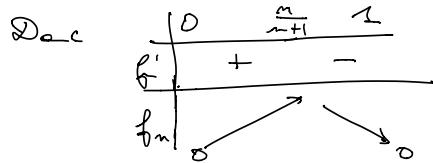
- fixons x : \rightarrow si $x < 1$: $x^n \rightarrow 0$
dans $x^n(1-x) \rightarrow 0$
 \Rightarrow dans $f_n(x) \rightarrow 0$
 \rightarrow si $x = 1$: $x^n(1-x) = 0$
dans $f_n(x) = 0$

Dans $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} 0$

- Etudions la convergence uniforme:

Fixons donc n , et posons $\delta_m := \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$
Dans $\delta_m = \sup_{x \in [0,1]} x^n(1-x)$

$$\begin{aligned} \text{Etudions } f_n: \quad f_n'(x) &= nx^{n-1} - (n+1)x^n \\ &= x^{n-1}(n - (n+1)x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Dac } \delta_m &= \max f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \text{Dac } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq 1$$

$$\text{Dac } 0 \leq \delta_m \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{Dac } \delta_m \rightarrow 0$$

Dans $f_n \xrightarrow{\text{CUC}} 0$.

$$3 - (I = [0, \infty), f_n(x) = \frac{x}{x+n})$$

\rightarrow CNS? on fixe $x > 0$, $\frac{x}{x+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Dans $f_n \xrightarrow{\text{CNS}} 0$

\rightarrow CUC? $\delta_m = \sup_I |f_n(x) - 0| = \sup_I f_n(x)$

On prend $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x}{x+n} \rightarrow 1$

Dans $\sup_I f_n(x) \geq 1$. Dac $\delta_m \geq 1$

Dans $\mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}$ donc f_m ne converge pas uniformément.

Si $I = \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{mx}{1+mx^2}$:

$$\bullet \text{ CUS? on fixe } x \in \mathbb{R}. f_m(x) = \frac{mx}{1+mx^2} = \frac{x}{\frac{1}{m} + x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \neq 0: f_m(x) &= \frac{1}{\frac{1}{mx} + x} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \frac{1}{x} \\ &\xrightarrow[0]{f_m \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 0: f_m(x) = 0 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0.$$

Dans $f_m \xrightarrow{\text{CUS}} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

\bullet CNV? Si f_m converge uniformément, ce doit être vers f . On f n'est pas continue alors que les f_m le sont. Donc d'après le théorème 1 du cours, f_m ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

autre possibilité: $\Gamma_m = \sup_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|$

On $f_m(0) = 0 = f(0)$ donc

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \sup_{\mathbb{R}^d} |f_m(x) - f(x)| \\ &= \sup_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{mx}{1+mx^2} - \frac{1}{x} \right| \\ &= \sup_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{mx^2 - 1 - mx^2}{x(1+mx^2)} \right| \\ &= \sup_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x(1+mx^2)|} \\ &= \sup_{\mathbb{R}_+^d} \frac{1}{x(1+mx^2)} \end{aligned}$$

On $\frac{1}{x(1+mx^2)} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} +\infty$ donc $\Gamma_m = +\infty$ Hm

Dans f_m ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

$\bullet I = (0, +\infty)$: idem car $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^d} |f_m(x) - f(x)| = +\infty$

$\bullet I = [a, +\infty)$, $a > 0$: $\Gamma_m = \sup_{\substack{x \geq a \\ x \in \mathbb{R}_+^d}} |f_m(x) - f(x)|$

$$= \sup_{x \geq a} \frac{1}{x(1+mx^2)}.$$

On la fonction $\frac{1}{x(1+mx^2)}$ est évidemment le produit de fonctions ≥ 0 décroissantes, donc

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{1}{\alpha(1+m\alpha^2)} \leq \frac{1}{m\alpha^3} \rightarrow 0.$$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{Ces}} \frac{1}{x}$ sur $\{x, x > 0\}$.

5 - $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

• CNS : On fixe $x > 0$, $f_n(x) \rightarrow \sqrt{x^2 + 0} = |x|$.

Donc $f_n \xrightarrow{\text{Ces}} |x|$ sur \mathbb{R}

• CNU, Fixons n et calculons $\varlimsup_{x \rightarrow \infty} |f_n(x) - |x||$

On $f_n(x)$ est paire donc $\varlimsup_{x \rightarrow \infty} |f_n(x) - |x||$

$$\varlimsup_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - x \right)$$

$g_n(x)$.

$$g_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1$$

$$\text{or } \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \geq x \text{ donc } \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leq 1$$

Donc $g_n'(x) \leq 0$ sur \mathbb{R}^+

Donc g_n est croissante sur \mathbb{R}^+

Donc $\varlimsup_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = g_n(0) = 1/n \rightarrow 0$.

Donc $f_n \xrightarrow{\text{Ces}} |x|$.

• f_n est C^∞ , mais $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

6 - ($I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^n e^{-(1+x^2)t^2} dt$)

• CNS : à x fixé, $e^{-(1+x^2)t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}

Donc $f_n(x) \rightarrow \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} dt$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{Ces}} \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} dt$

$$\begin{aligned} \text{CNU : } \varlimsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^\infty e^{-(1+x^2)t^2} dt \end{aligned}$$

où $1+x^2 \geq 1$, $\exp(-x)$ est décroissante

Dans $\int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} dt \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt$

Dans $R_n \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt = R_n$

Donc e^{-t^2} est intégrable sur \mathbb{R} donc

$$R_n = \int_0^\infty e^{-t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dans $R_n \rightarrow 0$ donc $f_n \xrightarrow{\text{CNU}} \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} dt$.

7. $I = [0, \infty)$ $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$

- CNS: à x fixé, $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$. Donc CNS

- CNU: $R_n = \sup |f_n(x) - e^{-x}| = \sup |q_n(x)|$

$$q_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x} = \frac{|x^2 - xe^{-x}|}{n+x} = \frac{x}{n+x} (x - e^{-x})$$

Or $q_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$

Dans $R_n = +\infty$ donc f_n n'est pas uniformément continue sur I

$$I = [0, a] : R_n = \sup_{x \in [0, a]} |q_n(x)|.$$

$$q_n(x) = \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}$$

$$q'_n(x) = \frac{(2x - e^{-x} + xe^{-x})(n+x) - x^2 + xe^{-x}}{(n+x)^2}$$

$$= \frac{2nx + x^2 - ne^{-x} + mx e^{-x} + x^2 e^{-x}}{(n+x)^2} ??$$

Plutôt: Sur $[1, a]$, $x - e^{-x} \nearrow$, pour de $1 \leq x \leq a$
 $\frac{x}{n+x}$ est \nearrow

Dans $[0, 1]$, $q_n(x) = - \underbrace{\frac{x}{n+x} (e^{-x} - x)}_{\geq 0}$

$$\text{et } \frac{x}{n+x} \leq \frac{1}{n+1}, \quad e^{-x} - x \leq 1 \quad \text{Dès } q_n|_{[0, 1]} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Fichéer, } R_m \leq \max \left\{ \frac{1}{m+1}, \underbrace{g_m(x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \right\}$$

0 0 car $f_m(x) \rightarrow f(x)$

Dans $R_m \rightarrow 0$ donc $f_m \xrightarrow{\text{Ces}} f$ sur $[0, \pi/2]$.

8 - $I = [0, \pi/2]$, $f_n(x) = n^2 (\sin x)^n \cos x$

- Ces: si $x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, donc

$(\sin x)^n$ est une suite géométrique de raison ≤ 1
donc $n^2 (\sin x)^n \rightarrow 0$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$
si $x = \pi/2$, $\cos x = 0$ donc $f_n(x) = 0 \quad \forall n$
donc $f_n(x) \rightarrow 0$.

Dans $f_n \xrightarrow{\text{Ces}} 0$

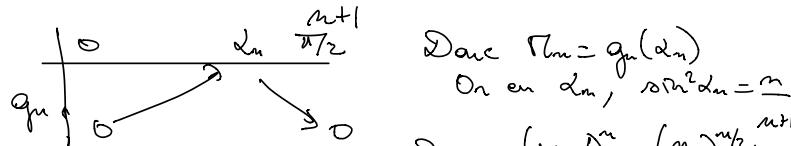
- Or: $R_m = \sup_{[0, \pi/2]} |f_m(x) - 0| = \sup_{[0, \pi/2]} n^2 (\sin x)^n \cos x$
 $= n^2 \sup_{[0, \pi/2]} (\sin x)^n \cos x$

$$g_m(x) = (\sin x)^n \cos x$$

$$\begin{aligned} g_m'(x) &= n(\sin x)^{n-1} \cos^2 x - (\sin x)^{n+1} \\ &= n(\sin x)^{n-1} (1 - \sin^2 x) - (\sin x)^{n+1} \\ &= n(\sin x)^{n-1} - (n+1)(\sin x)^{n+1} \\ &= (n+1)(\sin x)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1} - \sin^2 x \right) \end{aligned}$$

Puis $\sin^2 x$ est strictement $>$ sur $[0, \pi/2]$, donc il existe un unique $x_m \in [0, \pi/2]$ tq

$$\sin^2 x_m = \frac{n}{n+1}.$$



Donc $(\sin x_m)^n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2} = \frac{n^{n/2}}{(n+1)^{n/2}}$

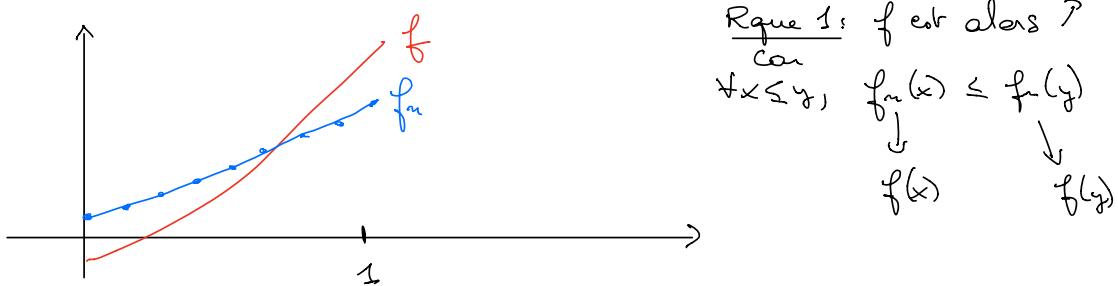
Donc $R_m = n^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2} \sqrt{1 - \frac{n}{n+1}}$
 $= n^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n/2}} \sqrt{\frac{1}{n+1}} \sim \frac{n^{3/2}}{e^{n/2}} \rightarrow \infty$

Dans $R_m \rightarrow \infty$ et f_m ne Ces pas uniformément.

Exercice 3: Théorème de Dini

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \\ f_n \xrightarrow{\text{CWS}} f \\ f \text{ continue} \end{array} \right.$$

1. On suppose en plus que f_n , $x \mapsto f_n(x)$ est croissante.



Réque 1: f est alors ?
 car
 $\forall x \leq y, f_n(x) \leq f_n(y)$
 \downarrow
 $f(x) \leq f(y)$

On veut $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| \rightarrow 0$. Fixons $\varepsilon > 0$.

- Comme $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, f est uniformément continue, donc

$$\exists N_0 / \forall k \in [0, N_0 - 1], |f\left(\frac{k+1}{N_0}\right) - f\left(\frac{k}{N_0}\right)| \leq \varepsilon.$$

- Comme $f_n \xrightarrow{\text{CWS}} f$, il existe N tq $\forall n \geq N$,

$\forall k \in [0, N - 1]$ (nous fixe de valeurs),

$$|f\left(\frac{k}{N_0}\right) - f_n\left(\frac{k}{N_0}\right)| \leq \varepsilon$$

- En particulier, $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} |f_n\left(\frac{k+1}{N_0}\right) - f_n\left(\frac{k}{N_0}\right)| &\leq |f_n\left(\frac{k+1}{N_0}\right) - f\left(\frac{k+1}{N_0}\right)| + |f\left(\frac{k+1}{N_0}\right) - f\left(\frac{k}{N_0}\right)| + |f\left(\frac{k}{N_0}\right) - f_n\left(\frac{k}{N_0}\right)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Et comme f_n est une fonction croissante,

$$\forall x \in \left[\frac{k}{N_0}, \frac{k+1}{N_0}\right], |f_n(x) - f_n\left(\frac{k}{N_0}\right)| \leq 3\varepsilon.$$

- Alors $\forall x \in [0,1]$, $\exists k / x \in \left[\frac{k}{N_0}, \frac{k+1}{N_0}\right]$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f\left(\frac{k}{N_0}\right)| + |f\left(\frac{k}{N_0}\right) - f_n\left(\frac{k}{N_0}\right)| + |f_n\left(\frac{k}{N_0}\right) - f_n(x)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon \leq 5\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N / \forall n \geq N, \max_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq 5\varepsilon$
 Donc $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$. \square .

2. On suppose à présent $f_m \geq f_n$. On fixe $\varepsilon > 0$.

Régle 1: Si on pose $g_n = f - f_n$, on a:

- g_n est continue
- $g_{n+1} \leq g_n$
- $g \xrightarrow{\text{CVS}} 0$.

Et si on montre que $g_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$ alors $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$.

$$r_m = \max g_n = g_n(x_m)$$

- r_m est décroissante, car $g_{m+1}(x_{m+1}) \leq g_m(x_{m+1}) \leq g_m(x_m)$
- Donc $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m \geq 0$.

Supposons $r > 0$

On regarde $K_m := \{x / f_m(x) \geq r/2\}$

K_m est fini dans $[q_1]$ qui est compact

Donc K_m est compact.

De plus, $K_{m+1} \subset K_m$ car $(f_m) \downarrow$.

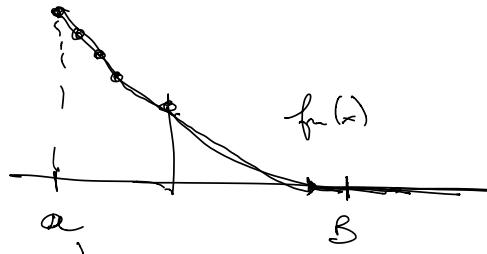
D'après le théorème des compacts emboîtés, il existe $x_0 \in [q_1] / x_0 \in \bigcap_{m \geq 0} K_m$.

Alors $\forall m, f_m(x_0) \geq r/2$. Or $f_m(x_0) \rightarrow 0$ par CVU.
 C'est une contradiction. \square

Exercice 4.

$$f_m(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m & \text{si } x \leq m \\ 0 & \text{si } x > m \end{cases}$$

1. CUS vers e^{-x}



2. Pour $x \leq m$, $1 - \frac{x}{m} \geq 0$
 et $\lim_{x \rightarrow m^-} 1 - \frac{x}{m} \rightarrow 0$
 et $t \mapsto t^m \nearrow$ sur $[0, +\infty)$

Donc $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ est \uparrow sur $(-\infty, m]$

Et $f_m(m) = 0$, $f_m = 0$ si $x > m$. Donc f_m est dérivable à m .

3. Sur $[a, B]$ compact, f_m est dérivable continue,
 converge uniformément vers $f = e^{-x}$ continue
 donc par le thm de Dini,

$f_m \xrightarrow{\text{C.U.}} e^{-x}$ sur $[a, B]$.

4. fixons $\varepsilon \geq 0$. Soit B tq $e^{-B} < \varepsilon$.

Il existe N tq $\forall n \geq N$, $\max_{x \in [a, B]} |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$

Donc $|f_n(B)| \leq 2\varepsilon$

Donc $\forall x \geq B$, $|f_n(x)| \leq 2\varepsilon$

Et donc $\forall x \geq B$, $|f_n(x) - e^{-x}| \leq 2\varepsilon$.

Donc $\max_{x \in [a, +\infty)} |f_n(x) - e^{-x}| \leq 2\varepsilon$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{C.U.}} e^{-x}$ sur $[a, +\infty)$.