

$$\text{Exercice 1: } P_m(x) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} u_k(x)$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $u_k(x) \geq 0$ et $u_{k+1}(x) \leq u_k(x)$

Dans le critère des séries alternées donne:

- $\forall x$, $P_m(x)$ converge. On note $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ sa limite, on l'appelle $f(x)$.
- $|P_m(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k(x) \right| \leq u_{m+1}(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$
 $\leq \frac{1}{m+1} \text{ si } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Dans $\sup_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |P_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$

$$\text{Dans } P_m \xrightarrow[\mathbb{R}_{\geq 0}]{} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$2. P_m'(x) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^m}{1 - (-x)}$$

$$\text{Dans } P_m'(x) = \frac{1 - (-x)^m}{1 + x} = \frac{1}{1+x} - (-1)^m \frac{x^m}{1+x}$$

$$\text{Dans } P_m(x) = P_m(0) + \ln(1+x) - (-1)^m \int_0^x \frac{t^m}{1+t} dt$$

$$\text{On } P_m(0) = 0$$

$$\text{Dans } P_m(x) = \ln(1+x) - (-1)^m \int_0^x \frac{t^m}{1+t} dt$$

$$3. R_m(A) = \int_A^A \frac{t^m}{1+t} dt \leq \int_A^A \frac{A^m}{1} dt \leq A^{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

et R_m est l'intégrale d'une fonction positive donc $R_m(A) \geq 0$

et donc $R_m(A) \rightarrow 0$ -

$$4. R_m(1) - R_m(A) = \int_A^1 \frac{t^m}{1+t} dt \leq \int_A^1 \frac{1}{1+t} dt = 1 - A.$$

$$\text{Dans } R_m(1) \leq 1 - A + R_m(A). \quad \forall A \in [0, 1]$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Posons $A = 1 - \varepsilon$, de sorte que $1 - A = \varepsilon$.

puisque ε et A sont alors fixés et $R_n(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe N ($n \geq N$, $R_n(A) \leq \varepsilon$).

Alors $\forall n \geq N$, $R_n(1) \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.

Donc $R_n(1) \rightarrow 0$. On $R_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$
Donc $0 \leq R_n(x) \leq R_n(1)$ si $x \in [0, 1]$
et $R_n(1) \rightarrow 0$

Donc $\sup_x R_n(x) \leq R_n(1) \rightarrow 0$

Donc $R_n \xrightarrow{\text{C.W.U}} 0$ sur $[0, 1]$.

5. On en déduit que $P_n \xrightarrow{\text{C.W.U}} \ln(1+x)$

6. et donc $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \xrightarrow{\text{C.W.U}} \ln(1+x)$ sur $[0, 1]$.

On en déduit donc $P_n(1) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exercice 2: $S_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^N u_n(x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

1. si $x \geq 0$, $x, x+1, \dots, x+n \geq 0$ donc $u_n(x) \geq 0$

De plus, $x+1 \geq 1, \dots, x+n \geq n$ Donc

$$u_n(x) \leq \frac{1}{n!} = \frac{1}{x \cdot x!}.$$

2. $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{x^n!}$, $\sum \frac{1}{n!}$ converge, donc

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

De plus si $x \in [a, +\infty)$, $u_n(x) \leq \frac{1}{x^n!} \leq \frac{1}{a^n!}$

Donc $\|u_n\|_{[a, +\infty)} \leq \frac{1}{a^n!}$

et $\sum \frac{1}{n!}$ converge donc $\sum \|u_n\|_{[a, +\infty)} < \infty$

Donc S_N converge normalement vers $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = S$

Donc $S_N \xrightarrow{\text{C.W.U}} S$.

On S_N est continue sur \mathbb{R}_+ et $a > 0$ donc S est continue sur \mathbb{R}_+ .

$$\begin{aligned}
 3. \quad u_m'(x) &= -\frac{1}{x^2(x+1)\dots(x+m)} - \dots - \frac{1}{x(x+1)\dots(x+m-1)(x+m)^2} \\
 &= -\frac{1}{x(x+1)\dots(x+m)} \left[\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x+m} \right] \\
 &= -u_m(x) \left[\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x+m} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } |u_m'(x)| &= u_m(x) \left(\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x+m} \right) \\
 &\leq \frac{1}{x^{m!}} \times \left(\underbrace{\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{m+1} \right) \leq \frac{m+1}{x^{m!}} \leq \frac{2}{x^2(m-1)!}.
 \end{aligned}$$

Donc du même, sur $[a, +\infty)$, $|u_m'(x)| \leq \frac{2}{x^2(m-1)!}$
et $\sum \frac{1}{(m-1)!} < +\infty$

Donc $\sum \|u_m'\|_{\infty, [a, +\infty)}$ < +∞

Donc $\sum u_m'$ converge uniformément, donc uniformément.

D'après le corollaire 2, S est donc de classe C^1
et $S'_m \xrightarrow{\text{C.U.}} S'$. sur $[a, +\infty)$.

Ceci étant vrai sur $[a, +\infty)$ + a, on a donc S est
de classe C^1 sur \mathbb{R}_f^+ .

$$\begin{aligned}
 4. \quad xS(x) - 1 &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} - 1 \\
 &= x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \dots + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} + \dots \right) - 1 \\
 &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} \\
 &= S(x+1).
 \end{aligned}$$

Exercice 3: $(a_n) \in \mathbb{R}$

1. On suppose $|a_n| \leq C^n$. Alors $\frac{a_n}{n!}x^n \leq \frac{C^n x^n}{n!} \leq \frac{(Cx)^n}{n!}$

• Donc si $u_m(x) = a_m \frac{x^m}{m!}$, on a

$$\|u_m\|_{\infty, [-A, A]} \leq \frac{(CA)^m}{m!}$$

Donc $\sum \|u_m\|_{\infty, [-A, A]} < +\infty$

Donc $\sum u_m$ converge normalement, donc uniformément sur $[-A, A]$.

Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ est continue.

• De plus, $u_m'(x) = a_m \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$

$$\text{Donc } \|u_m'\|_{\infty, [-A, A]} \leq C \cdot \frac{(CA)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Donc $\sum \|u_m'\|_{\infty, [-A, A]}$ converge

Donc $\sum u_m'$ converge normalement sur $[-A, A]$, donc uniformément.

Donc f est de classe C^1 , et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

• De même, $u_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m \\ a_m \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}, & \text{si } k \geq m \end{cases}$

$$\text{Donc } \|u_m^{(k)}\|_{\infty, [-A, A]} \leq C^k \frac{(CA)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} \|u_m^{(k)}\|_{\infty, [-A, A]} < +\infty$$

Donc $\sum u_m^{(k)}$ converge normalement sur $[-A, A]$.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} u_m(x) \xrightarrow{C\text{WU}} f$$

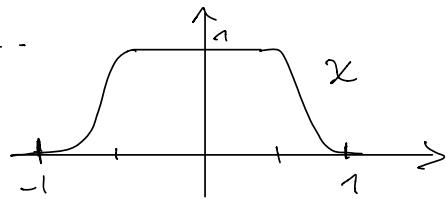
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_m'(x) \xrightarrow{C\text{WU}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_m^{(k)}(x) \xrightarrow{C\text{WU}}$$

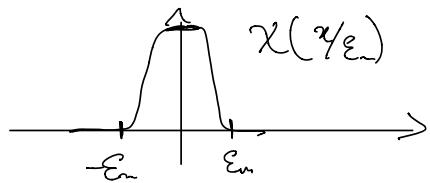
Donc f est de classe C^k sur $[-A, A]$ et $A \in \mathbb{R}$

Donc f est C^∞ sur \mathbb{R} .

2.



$$\varphi_m(x) = \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right) \text{ et } \frac{x^m}{m!}$$



$$\varphi_m(x) = a_m \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right) \frac{x^m}{m!}$$

Formule de Leibniz:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(m)}(x) &= a_m \sum_{k=0}^m C_m^k \left(\chi\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right)\right)^{(k)} \left(\frac{x^m}{m!}\right)^{(m-k)} \\ &= a_m \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{1}{\varepsilon_m^k} \chi^{(k)}\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right) \frac{x^{m-m+k}}{(m-m+k)!} \end{aligned}$$

Notons que pour $x \geq \varepsilon_m$, $\chi^{(k)}\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right) = 0$

Donc $\varphi_m^{(m)}(x) = 0 \quad \forall x \geq \varepsilon_m$.

Et si $x \leq -\varepsilon_m$,

$$\begin{aligned} |\varphi_m^{(m)}(x)| &\leq |a_m| \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{1}{\varepsilon_m^k} \pi_m \frac{\varepsilon_m^{m-m+k}}{(m-m+k)!} \\ &\leq |a_m| \pi_m \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\varepsilon_m^{m-m}}{\varepsilon_m^k} \\ &\leq |a_m| \pi_m \varepsilon_m^{m-m} \underbrace{\sum_{k=0}^m C_m^k}_{2^m} \\ &\leq |a_m| \pi_m 2^m \varepsilon_m^{m-m} \end{aligned}$$

3. Choisissons alors $\varepsilon_n = \frac{1}{\max(|a_n|^{2^n}, 1)} \times \frac{1}{2^n}$,

$$\text{de sorte que } \varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } |a_n| < 1 \\ \frac{1}{a_n^{2^n}} & \text{si } |a_n| > 1 \end{cases}$$

Alors • Si $|a_n| < 1 : |\varphi_n^{(m)}(z)| \leq R_m 4^m \cdot \frac{1}{2^m}$

• Si $|a_n| > 1 :$

$$\begin{aligned} |\varphi_n^{(m)}(z)| &\leq |a_n| R_m 2^m \left(\frac{1}{2|a_n|^{2^m}}\right)^{m-m} \\ &\leq |a_n| R_m 2^m \frac{1}{|a_n|^{2-2^m}} \times \frac{1}{2^m} \\ &\leq R_m 4^m |a_n|^{\frac{2^m-1}{m}} \times \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

donc toujours si $|a_n| > 1$, si $m \geq 2m$:

$$|a_n|^{\frac{2^m-1}{m}} \leq 1, \text{ donc}$$

$$\|\varphi_n^{(m)}\|_{\infty} \leq R_m 4^m \times \frac{1}{2^m}$$

Finalement dans tous les cas, $\|\varphi_n^{(m)}\|_{\infty} \leq R_m 4^m \times \frac{1}{2^m}$
dès que $m \geq 2m$.

Donc à m fixé, $\sum \|\varphi_n^{(m)}\|_{\infty} < +\infty$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} \sum \varphi_n \xrightarrow{\text{CVJ}} f \\ \sum \varphi'_n \text{ CVJ (car normale)} \\ \vdots \\ \sum \varphi_n^{(m)} \text{ CVJ (car normale)} \end{array} \right.$$

Donc f est de classe C^∞ et

$$f^{(m)} = \sum \varphi_n^{(m)}$$

Ceci étant vrai $\forall m$, f est de classe C^∞ .
De plus, comme $x(0) = 1$, $\chi^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \geq 1$,

$$\text{on a } \varphi_m^{(n)}(0) = a_m \frac{x^{m-n}}{(n-m)!} (0) = a_m \delta_{m,n}$$

$$\text{Done } f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_m^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_m \delta_{m,n} \\ = a_m. \quad \square.$$