Suites et séries de fonctions, TD 4 : Séries de Fourier.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = \cosh(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 : On pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{3-2\cos(2t)} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_{2k+1} = \frac{\pi}{10}$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t)\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1}(f) = 0$ et $a_{2n}(f) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) f(t)\, dt$ (Indication : utiliser la π-périodicité de f). Calculer $a_0(f)$ (Indication : utiliser le changement de variable $t = \tan(u)$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n+2}(f) + a_{2n-2}(f) + 6a_{2n}(f) = 0$. En déduire $a_{2n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calcul de la série de Fourier de f_α : vérifier que
$$a_n(f_\alpha) = (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \text{ et } b_n(f_\alpha) = 0.$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}.$$
2. Remarquer que $\ln(\sin(x))$ est une primitive de $\frac{1}{\tan(x)}$. Montrer alors que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$
$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

3. Vérifier que

$$\frac{2t}{(t^2 - n^2\pi^2)} = \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi}.$$

En utilisant une série dérivée, en déduire alors que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}.$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left(\left(2^{p^3} + 1\right) \frac{x}{2}\right).$$

1. Vérifier l'existence et la continuité de f.
2. Pour tout $\nu, n, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_{n,\nu}(f) = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\left(\frac{(2\nu + 1)}{2}\right) dt \text{ et } s_{q,\nu} = \sum_{i=1}^{q} a_{i,\nu}.$$

Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$ et montrer que $s_{q,\nu} \geq 0$. Montrer l'existence d'une constante $B > 0$ telle que $s_{\nu,\nu} > B \log(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Exercice 7 : Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et on suppose que $\alpha_n = O\left(n^{-p-\varepsilon}\right)$ en $+\infty$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Polynômes orthogonaux. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive d'intégrale 1. Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit

$$\langle P, Q \rangle_{L^2_\omega} := \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt.$$

1. Vérifier que cette formule définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que P_n est de degré n. On appelle ces polynômes les polynômes orthogonaux.
3. Montrer que si $\deg P < n$, $\langle P, P_n \rangle = 0$.
4. Montrer que (P_n) est la base de polynômes orthogonaux si et seulement si P_n est de norme 1, de degré n, et si $\langle P_n, X^k \rangle = 0 \ \forall k < n$.

On souhaite à présent démontrer que ces polynômes orthogonaux sont scindés à racines simples, avec toutes leurs racines dans I. Soient $x_1, \ldots, x_k$ les racines de P_n dans I.

5. On suppose dans un premier temps que les racines de P_n sont simples. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré k tel que Signe $Q(x)$ =Signe $P_n(x)$ pour tout $x \in I$.
6. En déduire que $k \geq n$ (on utilisera la question 3).
7. Traiter à présent le cas général, où les racines de P_n ne sont pas nécessairement simples.

On traite maintenant le cas $I = [-1, 1]$ et $\omega \equiv 1$. Soit $P_n(X) := \frac{d^n}{dx^n}\left((1 - X^2)^n\right)$.

8. Montrer que $P^{(k)}(1) = P^{(k)}(-1) = 0$ pour tout $k < n$.

9. Par intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)dx = 0$ pour tout Q de degré $k < n$.
10. En déduire que les poynomes orthonaux sont dans ce cas $c_n P_n$ pour des constantes $c_n \in \mathbb{R}_*^+$.