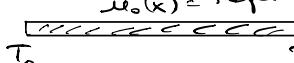


## 5- Une application : l'équation de la chaleur

On considère l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [0, L]) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(t, 0) = T_0, \quad u(t, L) = T_L \end{array} \right.$$

$u_0(x) = \text{Temps initial}$   
  
 $T_0 \qquad \qquad \qquad T_L$   
où  $u_0$  est une fonction continue

Cette équation décrit l'évolution de la température d'une barre (de conductivité thermique  $K$ ) pour laquelle la température initiale est donnée par  $u_0$ , et au  $t \geq 0$  on impose les températures aux deux extrémités de la barre.

Remarque → la température à l'équilibre est évidemment

$$T_{eq}(x) = \frac{(1-x)}{L} T_0 + \frac{x}{L} T_L$$

(c'est une solution de l'équation indépendante du temps si  $u_0 = T_{eq}$ )

→ La fonction  $v := u - T_{eq}$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [0, L]) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(0, x) = v_0(x) = u_0(x) - T_{eq}(x) \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi dit,  $v$  revient à l'équilibre (0) lorsque on pousse la température d'une barre en fixant ses extrémités à 0.

→ Si maintenant  $w(t, x) := v\left(\frac{t}{K}, Lx\right)$ , on a

$$(EC1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{t}{K}, \frac{Lx}{K}\right) = \frac{L^2}{K} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{t}{K}, \frac{Lx}{K}\right) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\partial^2 v\left(\frac{t}{K}, \frac{Lx}{K}\right)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \text{et } w \in C^4(\mathbb{R}^+ \times [0, \infty)) \\ w(t, 0) = w(t, \infty) = 0 \quad \forall t \\ w_0(x) = v(0, Lx) \end{array} \right.$$

Autrement dit, par un changement de variables, on peut se ramener au cas où la barre est de longueur  $L=1$  et la conductivité est  $K=1$ . On étudie dans la suite l'équation (EC).

Finalement notre problème est donc : trouver  $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi])$  tq

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 \quad \forall t \end{array} \right.$$

### a. Un argument formalisé

Développons  $u(t, x)$  en série de Fourier, sans se préoccuper pour l'instant de la convergence :

$$u(t, x) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx$$

Et devrons sans nous préoccuper des justifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dot{c}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \cos nx + \dot{b}_n(t) \sin nx \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) \cos nx + n^2 b_n(t) \sin nx \end{array} \right.$$

$$\text{Dès que } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \dot{c}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{a}_n(t) + n^2 a_n(t)) \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{b}_n(t) + n^2 b_n(t)) \sin nx$$

alors  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{a}_n(t) + n^2 a_n(t) \\ \dot{b}_n(t) + n^2 b_n(t) \end{array} \right\}$  sont les coeff de Fourier de la fonction

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dès que, } \dot{c}_0(t) = 0, \quad \dot{a}_n(t) = -n^2 a_n(t), \quad \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \\ \text{Dès que } c_0(t) = \text{cte}, \quad a_n(t) = c_n e^{-n^2 t}, \quad b_n(t) = d_n e^{-n^2 t} \\ \text{Dès que } u(t, x) = c_0 + \sum a_n e^{-n^2 t} \cos nx + b_n e^{-n^2 t} \sin nx \\ \text{alors } u(0, x) = u_0(x) = c_0 + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx. \end{array} \right.$$

On tombe sur une difficulté : la condition  $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0$  donc alors (si on espère les meilleures convergences possibles de la série de Fourier), que

$$c_0 + \sum a_n e^{-n^2 t} = 0 \quad \forall t$$

et donc  $c_0 = 0$  et  $a_n = 0 \iff a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

On voit n'assure que  $u_0$  est impaire, donc les  $a_n$  s'annulent pas forcément. Ce problème remonte en fait justement aux problèmes de convergence. Si on espère que la SF de  $u(t, \cdot)$  converge vers  $u(t, \cdot)$  (pour avoir le droit de dériver dans la somme), il faut que  $u(t, \cdot)$  soit périodique, et en particulier  $u_0$  doit être périodique,

ce qui n'est pas garanti par les hypothèses.

### b. Une solution

On doit donc adapter notre stratégie. Puisque on voudrait que les  $u_n$  soient nuls, on considère que notre problème n'est pas sur  $[0, \pi]$  mais sur  $[0, \bar{\pi}]$ .

$$(E2) \quad \begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times [0, \bar{\pi}]) \cap C^0(\mathbb{R}^+ \times [0, \bar{\pi}]) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, \bar{\pi}) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad u_0 \text{ donnée}$$

On prolonge alors  $u_0$  par impарtition :

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (\text{on suppose } u_0 = SF(u_0))$$

En menant les calculs de la partie précédente, on trouve maintenant

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-nt} \sin nx,$$

si tous les calculs se passent bien.

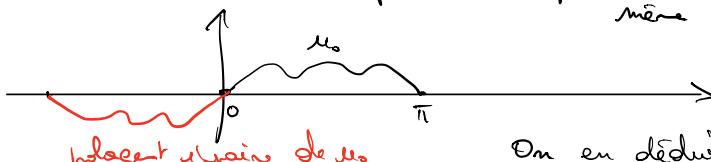
On va à présent vérifier que  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-nt} \sin nx$  est bien solution.

- Préliminaire: propriétés des  $b_n$ .

Notons que  $u_0(0) = 0$  et  $u_0$  a été prolongée par impарtition, le prolongement  $u_0$  à  $[-\bar{\pi}, \bar{\pi}]$  est donc continue en 0. De plus,  $u_0(\bar{\pi}) = 0 = -u_0(-\bar{\pi})$  par impартition, donc

$u_0 \in C^0([- \bar{\pi}, \bar{\pi}])$  dès que  $u_0 \in C^0([0, \bar{\pi}])$ , ce

qui est raisonnable puisque c'est une donnée physique qui est une température. Il est aussi raisonnable de supposer que  $u_0 \in C^1([0, \bar{\pi}])$ . Le prolongement par impартition donne alors une fonction  $C^1$  sur l'intervalle  $[-\bar{\pi}, \bar{\pi}]$ , et même en fait  $C^2$ .



On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \xrightarrow{C^2([- \bar{\pi}, \bar{\pi}])} u_0(x) \quad (\text{cad } \sum |b_n| < +\infty)$$

. Continuité de  $u$ : Pour  $t \geq 0$ , on a

$$|b_n e^{-nt}| \leq |b_n|$$

Dès lors  $\|b_n e^{-nt} \sin nx\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi])} \leq |b_n|$

et  $\sum |b_n|$  converge, donc

$\sum b_n e^{-nt} \sin nx$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$   
donc  $u(t, x)$  est bien définie et continue avec  
limite uniforme de fonctions continues.

. Dérivabilité par rapport à  $t$ :

Notons  $\Psi_n(t, x) := b_n e^{-nt} \sin nx$ .

$$\text{On a } \frac{\partial \Psi_n}{\partial t}(t, x) = -b_n n^2 e^{-nt} \sin nx$$

Or si  $t > 0$ ,  $n^2 e^{-nt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  Dès lors  $\sum |b_n| n^2 e^{-nt}$  converge (car  $\sum |b_n|$  converge)  
De plus, si  $t \geq \delta > 0$ ,  $n^2 e^{-nt} \leq n^2 e^{-\delta t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Dès lors } \left\| \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \right\|_{L^\infty([\delta, +\infty) \times [-\pi, \pi])} \leq \underbrace{|b_n| n^2 e^{-\delta t}}_{\text{la suite converge}}$$

Dès lors  $\sum \left\| \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \right\|_{L^\infty([\delta, +\infty) \times [-\pi, \pi])}$  converge,

dès lors (hors du cas):  $u = \sum \Psi_n$  est dérivable par rapport à  $t$ , et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum b_n n^2 e^{-nt} \sin nx \text{ sur } [\delta, +\infty \times [-\pi, \pi]] \quad \forall \delta > 0,$$

Dès lors  $u$  est dérivable par rapport à  $t$  sur  $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum b_n n^2 e^{-nt} \sin nx.$$

. Dérivabilité par rapport à  $x$ :

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}(t, x) = b_n n e^{-nt} \cos nx$$

Le même argument que ci-dessus donc dès lors  $\forall \delta > 0$ ,

$$\left\| \frac{\partial \Psi_n}{\partial x}(t, x) \right\|_{L^\infty([\delta, +\infty) \times [-\pi, \pi])} \leq \underbrace{n e^{-\delta t}}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ \leq 1}} |b_n| \text{ qui est}$$

dès lors la série générale d'une suite convergente.

Dans  $u(t, x) = \sum \varphi_n(t, x)$  est dérivable en  $x$  sur  $[\delta, +\infty \times [-\pi, \pi]]$ , de dérivée

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \sum n e^{-nt} b_n \sin nx.$$

et ainsi,  $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -n^2 b_n e^{-nt} \sin nx$

et le même argument donc donc que  $\varphi_n$  est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum n^2 b_n e^{-nt} \sin nx = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

#### - Dérivabilités supérieures:

De même:  $\frac{\partial^{k+p} \varphi_n}{\partial t^k \partial x^p} \stackrel{\mathcal{E}(P)}{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (1) b_n n^{2k+p} e^{-nt} x \\ (2) b_n n^{2k+p} e^{-nt} \end{array} \right\}$  cosnx si l'ordre p pair  
sin nx si l'ordre p impair

Donc  $\left\| \frac{\partial^{k+p} \varphi_n}{\partial t^k \partial x^p} \right\|_{\infty, [\delta, +\infty \times [-\pi, \pi]]} \leq |b_n| n^{2k+p} \underbrace{e^{-n\delta}}_{\downarrow n \rightarrow \infty}$

On en déduit par récurrence que  $u \in C^\infty([\delta, +\infty \times [-\pi, \pi]])$

donc  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi])$ .

#### . Équation aux dérivées partielles:

On a vu que  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

. Condition au bord:  $u(t, 0) = \sum b_n e^{-nt} \sin(n \cdot 0) = 0$   
 $u(t, \pi) = \sum b_n e^{-nt} \sin(n\pi) = 0$

. Limite quand  $t \rightarrow 0$ : On a vu que  $u$  est continue et limite uniforme de  $\sum b_n e^{-nt} \sin nx$  sur  $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$  donc en particulier,  $u(0, x) = \sum b_n \cdot 1 \cdot \sin nx = 0$ ,

On en conclut que l'équat de de chaleur a une solution donnée par  $u$ .

### c. Unicité de la solution :

La question à présent est : nous avons exhibé une solution à l'équation de la chaleur. Mais si nous voulons savoir que notre solution pour la température sur le domaine au temps t est bien celle que nous avons calculé, il faut vérifier que notre solution u est LA BONNE solution.

Nous allons à présent prouver que u est en fait l'unique solution (donc la bonne).

Pour cela : soit u, v deux solutions :  $u, v \in C^2(\mathbb{R}_+^t \times [0, \bar{x}]) \cap C^0(\mathbb{R}_+^t \times [\bar{x}, \bar{x}])$   
 toutes les deux vérifient :  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \bullet f(t, 0) = f(t, \bar{x}) = 0 \\ \bullet f(0, x) = u_0(x). \end{array} \right.$

Alors  $w = u - v$  vérifie :  $w \in C^0(\mathbb{R}_+^t \times [0, \bar{x}]) \cap C^1(\mathbb{R}_+^t \times [\bar{x}, \bar{x}])$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(t, 0) = w(t, \bar{x}) = 0 \\ w(0, x) = 0. \end{array} \right.$$

Donc alors  $E(t) := \int_0^{\bar{x}} w(t, x)^2 dx$

puisque  $w \in C^2(\mathbb{R}_+^t \times [0, \bar{x}])$ , pour  $t \in [\delta, T]$  avec  $\delta, T > 0$ ,

$$\left| \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \right|^2 = \left| w(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \right| \leq \Pi \text{ sur } [\delta, T].$$

Les théorèmes de dérivation sous intégrale donnent donc :

$E(t)$  est dérivable sur  $[\delta, T]$ , de dérivée :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}^2 dx = 2 \int_0^{\bar{x}} w \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) dx = 2 \int_0^{\bar{x}} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) dx \\ &= 2 \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= 2 \underbrace{\left[ w \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^{\bar{x}}}_{= 0 \text{ car } w(0) = w(\bar{x}) = 0} - 2 \int_0^{\bar{x}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E'(t) = -2 \int_0^{\bar{x}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0.$$

Donc  $E(t)$  est une fonction décroissante sur  $[0, A]$  et  $A > 0$   
Donc  $E(t)$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

On a  $E(0) = 0$  et  $E$  est continue en 0, donc  
 $E(t) \leq 0 \quad \forall t > 0$ . On a  $E(t) = \int_0^t w(t, x)^2 dt \geq 0$ .

Donc  $E(t) = 0 \quad \forall t > 0$  donc  $\int_0^t w(t, x)^2 dt = 0 \quad \forall t > 0$ .

Or  $w(t, x)^2 \geq 0$  et est continue donc  $w(t, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$   
 $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

Donc  $w = 0$  et donc  $u = v$ .

□.