TD 2 : Convolution

Exercice 1 : Montrer que la densité de la loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes de lois de densités f et g est $f \star g$.

Exercice 2 : Soit $\rho := \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Calculer et discuter la régularité de $\rho \star f$ pour

1. $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$,
2. $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$,
3. $f = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$,
4. f affine par morceaux, à support dans $[-1, 1]$, qui vaut 1 en 0.
5. la fonction obtenue au point précédent.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\chi := \mathbb{1}_{[0,1]}$ et f_n définie par récurrence par $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \chi \star f_n$.

1. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f_1'(x) = f(x+1) - f(x)$. En déduire que f_n est bien définie.
2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
3. Calculer f_2.

Exercice 4 :

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$
2. Calculer $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$.

Exercice 5 : Pour $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $f \star P$ est bien définie et est polynômiale.

Exercice 6 : Théorème de Weierstrass. On pose $c_k := \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^k dx\right)^{-1}$ et

$$\begin{array}{rccl} \rho_k & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} c_k(1-x^2)^k & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que la suite (ρ_k) est une approximation de l'unité.

Soit $f : [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}_{|[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]=f} \\ \tilde{f}_{|\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = 0 \\ \tilde{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et affine sur } [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

2. Montrer que $\rho_k \star \tilde{f}$ converge uniformément vers $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\rho_k \star \tilde{f}$ coincide avec une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
4. Montrer que toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynômiales.

Exercice 7 : Convolution périodique. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodiques. On définit

$$f \star g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

1. Montrer que $f \star g = g \star f$.
2. Montrer que si g est un polynôme trigonométrique, il en est de même de $f \star g$.

Une approximation de l'unité 2π-périodique est une suite de fonctions $\rho_k \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodiques telles que

$$\rho_k \geq 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \rho_k(t)dt = 1, \qquad \forall \delta, \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \rho_k(t)dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Montrer que si ρ_k est une approximation de l'unité sur $[-\pi, \pi]$, alors $\rho_k \star f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Théorème de Féjèr. On définit $c_k := \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(kt/2)}{\sin t/2} \right)^2 dt \right)^{-1}$ et les noyaux de Féjèr :

$$\rho_k(x) := c_k \left(\frac{\sin\left(kx/2\right)}{\sin\left(x/2\right)} \right)^2.$$

1. Montrer que ρ_k est un polynôme trigonométrique en x (en particulier 2π-périodique).
2. Montrer que ρ_k est une approximation de l'unité sur $[-\pi, \pi]$ (défini dans l'exercice précédent).
3. En déduire le théorème de Féjèr : toute fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Exercice 9 : Le théorème de Féjèr implique celui de Weierstrass. On rappelle qu'il existe des polynômes (dits de Tchebycheff) tels que

$$T_k(\cos\theta) = \cos k\theta.$$

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\tilde{f} := f(\cos t)$.

1. Montrer que $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, 2π-périodique et paire.
2. En utilisant le théorème de Féjèr, montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques f_k pairs qui convergent uniformément vers $\tilde{f}$.
3. En utilisant les polynômes de Tchebycheff, montrer que f est limite uniforme de polynômes.

Exercice 10 : On étudie le problème de Dirichlet : étant donnée $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue, trouver $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ dans } \mathbb{D} \\ u_{|\partial\mathbb{D}} = f. \end{cases}$$

Les fonctions qui vérifient $\Delta u = 0$ sont dites harmoniques.

1. Montrer que la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique (Indication : équations de Cauchy-Riemann).
2. Montrer les égalités suivantes :

$$P(r,\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \sum r^{|n|}e^{in\theta} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right).$$

3. Montrer que pour toute suite $r_n \to 1$, la suite de fonctions $P(r_n, \cdot)$ est une approximation de l'unité 2π-périodique (voir exercice 3 pour la définition).
4. Montrer que $P(r,\theta)$ est une fonction harmonique.
5. En déduire que $u(r,\theta) := P(r,\cdot) \star f\ (\theta)$ est une solution de notre problème, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{D}$.
6. On suppose à présent que v est une solution du problème. Montrer que $w := u - v$ est solution de :

$$\begin{cases} w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}}), \\ \Delta w = 0, \\ u_{|\partial\mathbb{D}} = 0. \end{cases}$$

On s'intéresse à présent à l'unicité du problème, c'est-à-dire qu'on souhaite démontrer que $w = 0$. On pose $w_\varepsilon(z) := w + \varepsilon|z^2|$.

7. Montrer que $\Delta w_\varepsilon = \varepsilon$ sur $\mathbb{D}$, et en déduire que w_ε ne peut atteindre son maximum en un point de $\mathbb{D}$. En déduire que $\max w \le \varepsilon$.
8. Par un raisonnement analogue, montrer que $\|w\|_\infty \le \varepsilon$, et conclure que $w = 0$.