

TD 3 : Espaces L^p

Petit syllabus sur les espaces L^p

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (éventuellement $\Omega = \mathbb{R}^d$). Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω qui vérifient l'inégalité

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Pour $p = +\infty$, on définit $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω qui ont un représentant borné. On définit également pour $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leq M \text{ p.s.}\}$$

Voici une liste des propriétés principales de ces espaces :

- (A) $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.
- (B) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach,
- (C) $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$. On peut donc voir $L^p(\Omega)$ comme le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour cette norme.
- (D) Pour $p \in]1, +\infty[$, $L^p(\Omega)$ est séparable et réflexif. Pour rappel, un espace E est séparable si il contient une partie dénombrable dense. Il est réflexif si l'application

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E^{**} \\ e &\longmapsto (\Lambda \in E^* \mapsto \Lambda(e)) \end{aligned}$$

est surjective (elle est alors bijective).

- (E) Pour $p \in [1, +\infty)$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isométrique à $L^q(\Omega)$, via l'application

$$\begin{aligned} T : L^q(\Omega) &\longrightarrow L^p(\Omega)^* \\ g &\longmapsto \left(f \mapsto \int_{\Omega} f g d\mu \right). \end{aligned}$$

Le but de ce TD est de prouver une partie des résultats ci-dessus. Précisément, les points (A), (B), et (E). Le point (D) sera traité en cours.

1 Les espaces $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$

Exercice 1 : $L^\infty(\Omega)$. Montrer (A) et (B) quand $p = +\infty$.

Exercice 2 : Inégalité de Minkowski. Le but est de démontrer que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$ pour $p < +\infty$.

1. Montrer l'inégalité de Minkowski : si f et g sont mesurables sur Ω ,

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indication : on pourra poser $f' = \frac{f}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$, $g' = \frac{g}{\|g\|_{L^p(\Omega)}}$ et utiliser une inégalité de convexité. Une autre solution classique passe par l'inégalité de Hölder.

2. En déduire que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

Exercice 3 : Complétude. On démontre ici que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est complet pour $p < +\infty$. On considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite de (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$.
2. Extraire une sous-suite $(\tilde{f}_k) = (f_{n_k})$ qui vérifie $\|\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}\|_{L^p} < \frac{1}{2^k}$. On pose

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|.$$

3. En remarquant que $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$ pour tout n , montrer que $g_n(x)$ converge presque sûrement vers une limite finie, qu'on appellera $g(x)$. En déduire que $\tilde{f}_k(x)$ converge aussi p.s. vers une limite finie, appelée $f(x)$.
4. Montrer que g est L^p et que g_n converge vers g dans $L^p(\Omega)$.
5. Montrer que $|f(x) - \tilde{f}_k(x)| \leq g(x)$ p.s. et en déduire que $f \in L^p(\Omega)$.
6. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\tilde{f}_k \xrightarrow{L^p} f$.

Exercice 4 : Inégalités intermédiaires.

1. Montrer que si $\text{Vol}(\Omega) < +\infty$ alors $L^p(\Omega) \subsetneq L^{p'}(\Omega) \quad \forall p' \leq p$.
2. Pour $p' < p$, montrer qu'aucune des inclusions $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ou $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ n'est vraie.
3. Soit à présent $p < s < p'$. Montrer qu'il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $\forall y > 0, y^s \leq \mu y^p + (1 - \mu)y^{p'}$. En déduire que quel que soient Ω , si $f \in L^p(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ alors $f \in L^s(\Omega)$ pour tout $s \in [p, p']$.
4. Si $f, g \in L^p(\Omega)$, montrer que $|f|^\alpha |g|^\beta \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

Exercice 5 : Inégalité de Hölder. Le but est de montrer l'inégalité de Hölder : si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables et si $p, q, r \in \mathbb{R}_+$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1. On considère d'abord le cas $r = 1$. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu.$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder pour $r = 1$, d'abord lorsque $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)} = 1$, puis dans le cas général.
3. Reprendre la preuve précédente pour établir l'inégalité de Hölder pour $r \in \mathbb{R}^+$.
4. Considérer finalement le cas où l'un ou plusieurs des indices p, q, r sont $+\infty$.

2 Dual de $\ell^p(\mathbb{R})$ ($p \in [1, +\infty[$).

Vous pouvez vous convaincre que la partie précédente s'applique directement à $\ell^p(\mathbb{R})$ (ou même $\ell^p(\mathbb{C})$). Dans cette partie, on démontre (E) pour ces espaces. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note δ_k la suite $(\delta_{ki})_{i \in \mathbb{N}}$.

1. Démontrer la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} T : \ell^q(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^p(\mathbb{R})^* \\ (b_i) &\longmapsto (a_i) \mapsto \langle a, b \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i. \end{aligned}$$

Si vous avez réussi, l'exercice est terminé. Sinon, passez à la suite des questions, qui balisent la démonstration.

On considère $\Lambda \in \ell^p(\mathbb{R})^*$ et on veut montrer l'existence de $b \in L^q(\Omega)$ telle que $\Lambda = T(b)$. On pose $b := (\Lambda(\delta_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On va montrer que $b \in L^q(\mathbb{R})$ et que $\Lambda = T(b)$.

2. Montrer que $\Lambda(a) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle a, b \rangle_N := \sum_{i=0}^N a_i b_i$. Est-ce encore vrai pour $p = +\infty$?
3. Montrer qu'il suffit de démontrer le résultat souhaité lorsque $b_i \geq 0 \forall i$. On fait donc cette hypothèse dans la suite de l'exercice.
4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in L^p(\mathbb{R})$, $\|a\|_p = 1$ $\langle a, b \rangle_N := \sum_{i=0}^N b_i a_i \leq C$.
5. En utilisant le théorème des extréma liés, montrer l'existence de $\lambda(N) > 0$ tel que le maximum de $\langle a, b \rangle_N$, $\|a\|_p = 1$ est atteint pour $a = \lambda b$.
6. Calculer λ et montrer que le maximum en question est exactement $(\sum_{i=1}^N b_i^q)^{\frac{1}{q}}$.
7. En déduire que $b \in \ell^q(\mathbb{R})$ et que $\Lambda = T(b)$.
8. En raisonnant de manière identique, montrez que $\ell^1(\mathbb{R}) = \ell_0^\infty(\mathbb{R})^*$, où $\ell_0^\infty(\mathbb{R})$ désigne les suites bornées qui tendent vers 0.

3 Dual de $L^p(\Omega)$ ($p \in]1, +\infty[$).

Dans toute la suite, on convient que p, q sont conjugués l'un à l'autre ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et on définit T par la formule donnée en (E).

On rappelle que le dual d'un espace de Banach X est un espace de Banach pour la norme $\|\Lambda\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X=1} \Lambda(x)$. Plus généralement, si X, Y sont deux espaces de Banach, l'espace des applications linéaires continues $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach pour la norme $\|u\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|u(x)\|_Y$.

Exercice 6 : Quelques remarques générales sur T .

1. Montrer que T est bien défini et prend effectivement ses valeurs dans $L^p(\Omega)^*$. Ceci signifie que $T(f)(g)$ est bien défini et réel pour tout $f \in L^q(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T(f)g\| < C\|g\|_{L^p} \forall g \in L^p(\Omega)$. Quelle est cette constante ?
2. Montrer que $\|T(f)\| = \|f\|_{L^q(\Omega)}$. En déduire que T est une application linéaire continue isométrique, donc injective.
3. Montrer (E) pour $p = 2$ (Indication : Riesz).

Exercice 7 : Dual de $L^p(\Omega)$ pour $\text{Vol}(\Omega) < +\infty$ et $1 < p < 2$. On suppose dans tout cet exercice que $\text{Vol}(\Omega) < +\infty$ et $1 < p < 2$.

1. Montrer que le conjugué $q = p(q-1)$ (vérifiant $1/p + 1/q = 1$) vérifie $q > 2$. Montrer également que

$$\|\cdot\|_{L^p} \lesssim \|\cdot\|_{L^2} \lesssim \|\cdot\|_{L^q},$$

$$L^q(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

2. Soit $\Lambda \in L^p(\Omega)^*$. Montrer qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall f \in L^2(\Omega), \Lambda(f) = \int_{\Omega} f g d\mu.$$

3. Montrer que $f_k := g|g|^{q-2} \mathbf{1}_{\{|g|<k\}}$ est dans $L^2(\Omega)$. En utilisant le fait que $\Lambda(f) \leq \|\Lambda\| \|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$, montrer que

$$\left(\int_{|g|<k} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\Lambda\|.$$

4. En déduire que $g \in L^q(\Omega)$, et que $\Lambda = T(g)$.
5. Conclure que T est surjective.

Exercice 8 : Convexité uniforme de L^p lorsque $p > 2$. On choisit $p > 2$ et on définit la fonction

$$\begin{aligned} \psi &: L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \end{aligned}$$

Soit aussi $f \in L^p(\Omega) \setminus \{0\}$ et $h \in L^p(\Omega)$, pour lesquels on choisit des représentants encore notés $f, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid |h(x)| < |f(x)|\} \\ B &:= \{x \in \Omega \mid |h(x)| \geq |f(x)|\} \end{aligned}$$

Ce sont évidemment des ensembles mesurables.

1. Majorer les intégrales de $|f|^p$, $|f+h|^p$, $|f|^{p-1}|h|$ et $|f|^{p-2}|h|^2$ sur B par $\mathcal{O}(\|h\|_{L^p}^2)$.
2. Montrer que

$$\int_A |f+h|^p d\mu = \int_A |f|^p + p \int_A \text{Sgn}(f) |f|^{p-1} h d\mu + R(h, f),$$

$$\text{où } |R(h, f)| \leq C(f, p) \|h\|_{L^p}^2.$$

3. En déduire que ψ est différentiable en f , de dérivée

$$\psi'(f)h = p \int_{\Omega} \text{Sgn} f |f|^{p-1} h d\mu.$$

4. En déduire en particulier que $\psi'(f)$ est surjective pour $\|f\|_{L^p} = 1$. Autrement dit, ψ est une submersion au voisinage de la sphère unité.

5. (Facultatif) Raisonner de façon analogue pour démontrer que f est deux fois dérivable en $f \neq 0$, et que sa Hessienne est donnée par

$$d^2\psi(f)(h_1, h_2) = p(p-1) \int_{\Omega} |f|^{p-2} h_1 h_2 d\mu.$$

En déduire que ψ est convexe, mais montrer aussi que la Hessienne de ψ n'est pas partout définie positive.

6. Inégalité de Clarkson (H. Brezis, "Analyse Fonctionnelle") :

- Montrer que $\forall x > 0, (x^2 + 1)^{\frac{p}{2}} \geq x^p + 1$.
- En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 0, (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \geq \alpha^p + \beta^p$.
- En appliquant l'inégalité précédente pour $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$, montrer l'inégalité de Clarkson :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

7. En déduire que

$$\psi\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\psi(f) + \psi(g)) - \frac{1}{2}\|f-g\|_{L^p}^p.$$

8. Montrer que L^p est uniformément convexe :

$$\forall \delta, \exists \varepsilon > 0 \mid \forall x, y \in L^p(\Omega), \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\|_{L^p} > \varepsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Exercice 9 : Dual de $L^p(\Omega)$ pour $p > 2$. On utilisera le résultat de l'exercice précédent : Pour $p > 2$, la norme L^p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $L^p(\Omega) \setminus \{0\}$ et L^p est uniformément convexe :

$$\forall \delta, \exists \varepsilon > 0, \mid \forall x, y \in S_{L^p}(1), \|x-y\|_{L^p} > \varepsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

1. Montrer que $1 < q < 2$.
2. Soit $\Lambda \in L^p(\Omega)^*$, $\|\Lambda\| = 1$. Montrer qu'il existe un unique $f_{\Lambda} \in L^p(\Omega)$ telle que $\|f_{\Lambda}\| = 1$ et $\Lambda(f_{\Lambda}) = 1$.
3. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda = \alpha d_{f_{\Lambda}} \cdot \| \cdot \|_{L^p}$.
4. En déduire que si $f_{\Lambda_1} = f_{\Lambda_2}$ alors $\Lambda_1 = \Lambda_2$.
5. Pour $f \in L^p(\Omega)$, trouver un élément $g \in L^q(\Omega)$ tel que $f_{T(g)} = f$.
6. En conclure que T est surjective.