TD 4 : Analyse fonctionnelle

Exercice 1 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. On veut montrer que sa boule unité n'est pas compacte. On va pour cela construire une suite dont aucune sous-suite ne converge.

1. Soit $\Lambda \in E^*$, $\|\Lambda\| = 1$, et on suppose qu'il existe $e \in E$, $\|e\| = 1$, tel que $\Lambda(e) = 1$. Montrer que
$$\forall f \in \ker \Lambda, \qquad \|e - f\| \geq 1.$$
2. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, construire une suite de vecteurs $(e_i) \in E$ tels que $\|e_i - e_j\| \geq 1 \ \forall i \neq j$. (Indication : on construit une suite (e_i, Λ_i) pour laquelle $e_{i+1} \in \ker \Lambda_i$, et les Λ_i sont bien choisis.)
3. Conclure.

Exercice 2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach uniformément convexe pour lequel la norme est dérivable sur $E\backslash\{0\}$, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\tilde{\Lambda} : E \to \mathbb{R}$ qui étend Λ et telle que $\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$. Avec un exemple en dimension finie, montrer que l'hypothèse de dérivabilité de la norme est nécessaire.

Exercice 3 :

1. Soit E un espace de Banach et $e \in E$. Utiliser le théorème de Hahn-Banach pour montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $e = 0$.
   ii) $\Lambda(e) = 0$ pour tout $\Lambda \in E^*$.
   iii) $\Lambda(e) = 0$ pour tout Λ dans une partie dense de E^*.
2. En déduire qu'une fonction $f \in L^p(\Omega)$ qui vérifie
$$\int_\Omega f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \text{ou alors } \int_U f = 0 \quad \forall U \subset \Omega \text{ ouvert}$$
est nulle.

Exercice 4 : Prolongements de formes linéaires. Soit $(E, \|\cdot\|)$ le complété d'un evn $(F, \|\cdot\|)$. Observez que l'existence d'un prolongement continu d'une forme linéaire $\Lambda : F \to \mathbb{R}$ en une forme linéaire $\tilde{\Lambda} \in E^*$ se traduit exactement par une inégalité :
$$|\Lambda(f)| \leq C\|f\| \quad \forall f \in F.$$
Cet exercice propose des applications de cette observation simple.

1. Montrer qu'on peut définir $f(x)$ pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, de sorte que si $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d) \longrightarrow f$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, si et seulement si il existe une constante $C(x)$ telle que
$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \qquad |f(x)| \leq C(x)\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$
2. Montrer que si la fonction $C(x)$ de la question précédente existe et est localement bornée sur Ω, les fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ ont un représentant continu sur Ω. Et si C est bornée sur Ω, ces fonctions ont en fait un représentant dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

3. Soit $\delta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ défini par $\delta(f) = f(0)$. Montrer que quel que soit $p \geq 1$, il n'existe pas de fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ telle que
$$\delta(f) = \int_{\mathbb{R}} fg.$$
Autrement dit, *"le dirac n'est pas une fonction L^p"*.

Exercice 5 : (Le même, pour des applications linéaires). Soient E, Y deux espaces de Banach, obtenus comme complétions d'evn $(F, \|\cdot\|_E)$ et $(X, \|\cdot\|_Y)$. Observez qu'une application linéaire $u : F \to X$ se prolonge en une application linéaire continue $u : E \to Y$ si et seulement si il existe une constante C telle que
$$\|u(f)\|_Y \leq C\|f\|_E \quad \forall f \in F.$$
On donne ici des applications de cette observation simple.

1. En reprenant l'exercice 1 du TD sur les espaces de Sobolev, montrez qu'on a établi l'inégalité :
$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[, \mathbb{R}), \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(]0,1[)}.$$
2. En conclure directement que tout $f \in W^{1,p}(]0,1[)$ a un représentant continu.
3. Montrer que $\tau_h : (\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}) \to (\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$ est une isométrie. En déduire que τ_h se prolonge en une isométrie $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$. On sait donc définir $f(\cdot + h)$ pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, bien que $f(x)$ ne signifie rien.

Exercice 6 :

1. Soient $\Lambda \in E^*$ et $\Lambda_n \in E^*$ une suite bornée telle que $\Lambda_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(f)$ pour tout $f \in F$, où F est un sous-espace dense dans E. Montrer que $\Lambda_n \overset{\text{CVF}}{\rightharpoonup} \Lambda$.
2. Construire un contre-exemple à l'énoncé ci-dessus dans lequel on n'impose pas l'hypothèse que la famille Λ_n est bornée (on pourra considérer $E = L^1([0,1])$ et $\Lambda = 0$).

Application : équirépartition des rotations irrationnelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On définit $\mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1], \mathbb{C})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ qui prennent des valeurs identiques en 0 et 1, muni de la norme uniforme. Pour $x \in [0,1]$, on pose
$$\begin{array}{rcccl} \Lambda_N & : & \mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1]), \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & S_N(f, \alpha, x) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(x + N\alpha\,[1]). \end{array}$$

3. Montrer que $S_N(e^{2i\pi pt}, \alpha, x) \longrightarrow 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et que $\|\Lambda_N\| \leq 1$.
4. En déduire que $S_N(f, \alpha, x) \longrightarrow \int_0^1 f(t)dt$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1], \mathbb{C})$.

On souhaite faire une théorie L^2 des questions précédentes.

5. Expliquer ce qui pose problème dans les deux questions précédentes si on change $\mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1], \mathbb{C})$ par $L^2([0,1], \mathbb{C})$.
6. Montrer que $L^2([0,1])$ est le complété de l'espace $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ lorsqu'on le munit de la norme $\|\cdot\|_{L^2([0,1])}$. Montrer que l'injection de $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans ce complété donne $\mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1]) \subset L^2([0,1])$.
7. Pour $h \in \mathbb{R}$, montrer que $\tau_h(f) := f(\cdot + h)$, défini sur $\mathcal{C}_{\text{per}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ se prolonge à $L^2([0,1])$. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}^0([0,1], \mathbb{C})$, $\tau_h(f)(x) = f(x + h\,[1])$.

8. Montrer que l'opérateur

$$\begin{array}{rcccl} S_N(\alpha,\cdot) & : & \mathcal{C}^0_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0_{\text{per}}([0,1],\mathbb{C}) \\ & & f & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(\cdot + k\alpha\,[1]) \end{array}$$

se prolonge en un opérateur continu de $L^2([0,1])$ dans lui-même.

9. Montrer que $(S_N(\alpha,\cdot))_N$ est une suite bornée.
10. Montrer que $S_N(\alpha, e^{2i\pi pt} \longrightarrow 0\ \forall p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et que $S_N(\alpha,1) = 1$.
11. Montrer que $S_N(\alpha,f)$ tend vers la fonction constante $\int_0^1 f$ au sens L^2, quand N tend vers l'infini, $\forall f \in L^2([0,1])$.
12. Montrer que pour tout intervalle $I \subset [0,1]$,

$$\frac{1}{N}\text{Card}\,\{n \in [0, N-1] \mid n\alpha\,[1] \in I\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell(I).$$

Exercice 7 : Dualité et produits. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach, et $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$.

1. Donner plein de normes naturelles sur E^k et voir qu'elles sont équivalentes.
2. Montrer que tout $\Lambda \in (E^k)^*$ est du type

$$\Lambda(x_1,\ldots,x_k) = \Lambda_1(x_1) + \cdots + \Lambda_k(x_k),$$

   où chaque $\Lambda_i \in E^*$.

3. En déduire que $(E^k)^* \approx (E^*)^k$.
4. Déduire aussi de la première question que si E est réflexif, E^k l'est aussi.

Exercice 8 : Application : Dualité et espaces de Sobolev (Adams, *Sobolev spaces*). Soit $C(k,d)$ le nombre de multi-indice à d variables de longueur inférieure ou égale à k. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et

$$\begin{array}{rcccl} i & : & W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega)^{C(k,d)} \\ & & f & \longmapsto & (\partial_I f)_{|I|\leq k}. \end{array}$$

1. Montrer que i est une isométrie, et que son image est fermé. Est-elle surjective ?
2. Montrer que pour $\Lambda \in W^{k,p}(\Omega)^*$, il existe des fonctions $g_I \in L^q(\Omega)$, $|I| \leq k$ telles que

$$\forall f \in W^{k,p}(\Omega), \quad \Lambda(f) = \sum_{|I|\leq k} \int_\Omega g_I \partial_I f.$$

Pour $g \in L^q(\Omega)$, on définit $\partial_I g$ la forme linéaire définie sur $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ par

$$\partial_I g(\varphi) = (-1)^I \int_\Omega g \partial_I \varphi.$$

(C'est la dérivée de g au sens des distributions). On définit aussi $W^{k,p}_0(\Omega)$ le complété de l'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ pour la norme de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

3. Montrer que $W^{k,p}_0(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $W^{k,p}(\Omega)$.
4. Montrer que si $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)$, $\partial_I g(\varphi) = \int_\Omega \varphi \partial_I g$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.

5. Montrer que pour $|I| \leq k$ et $g \in L^q(\Omega)$, la distribution $\partial_I g$ se prolonge continûment à $W_0^{k,p}(\Omega)$ en
$$\partial_I g(f) = (-1)^{|I|} \int_\Omega g \partial_I f.$$
6. En déduire que tout $\Lambda \in W^{k,p}(\Omega)^*$ est le prolongement à $W^{k,p}(\Omega)$ d'une distribution de la forme
$$\sum (-1)^{|I|} \partial_I g_I \quad \text{où } \; g_I \in L^q(\Omega) \; \forall |I| \leq k.$$
7. Montrer que si $(g_I) \in L^q(\Omega)$, la distribution $\sum (-1)^{|I|} \partial g_I$ se prolonge toujours en une forme linéaire continue sur $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Exercice 9 : Opérateurs à noyaux. Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega')$ et
$$\begin{array}{cccc} \Phi_K & : & L^2(\Omega') & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & & f & \longmapsto & x \mapsto \int_{\Omega'} K(x,y) f(y) dy. \end{array}$$

1. Montrer que Φ_K est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans $L^2(\Omega)$). Inventer une version avec des p et des q à la place de 2.
2. Calculer l'adjoint de K.

On suppose à présent que Ω est un domaine borné, et on considère un sous-espace fermé $F \subset L^2(\Omega)$ tel que :

- F a une base Hilbertienne de fonctions continues $(e_i)_{i \in I}$ (en particulier les fonctions continues sont denses dans F),
- Pour tout $x \in \Omega$, la forme linéaire $\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)$, bien définie sur $\mathcal{C}^0(\Omega)$ s'étend continûment à F.

3. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, il existe $K_x \in F$ telle que
$$f(x) = \int_\Omega K_x(t) f(t) dt.$$
4. En décomposant K_x dans la base hilbertienne (e_i), montrer que
$$K_x = \sum_{i \in I} e_i(x) e_i \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$
5. En déduire que $\sum |e_i(x)|^2 < +\infty$ pour tout $x \in \Omega$, puis que pour tout $t \in \Omega$,
$$K_x(t) = \sum_{i \in I} e_i(x) e_i(t).$$
On posera alors $K(x,t) = K_x(t) = K(t,x)$.
6. Montrer que $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$.
7. Montrer que pour $f \in L^2(\Omega)$, $\Pi(f) := \int_\Omega K(\cdot, t) f(t) dt$ est bien définie et est la projection orthogonale de f sur F.

Exercice 10 : Espace de Bergman. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $F \subset L^2(\Omega, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions L^2 qui sont holomorphes sur Ω.

1. Pour une fonction f holomorphe sur $D(a,R) \subset \mathbb{C}$, montrer que
$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{D(a,R)} f(z) d\mu(z).$$
2. En déduire que F est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.

Exercice 11 : Théorème de Runge (d'après Hörmander, voir Lax, *Functional analysis*). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe (ce qui est équivalent au fait que $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est connexe). Soit $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$. Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe une suite de polynômes $P_n \in \mathbb{C}[z]$ qui converge uniformément vers f sur K.

On considère un lacet $\gamma : [0,1] \to \Omega\backslash K$, dont l'indice autour de chaque point de K vaut 1 (on admettra l'existence de ce lacet, qui découle de la simple connexité). On note $\Gamma := \mathrm{Im}\,\gamma$.

1. Montrer que $K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid d(z,K) < \varepsilon\}$ est un ouvert, dont l'adhérence ne rencontre pas Γ pourvu que ε soit choisi suffisamment petit, ce qu'on supposera dans la suite.

Finalement, on note

$$E := (\mathrm{Hol}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty,K_\varepsilon}),$$
$$F := (\mathbb{C}[z], \|\cdot\|_{\infty,K_\varepsilon}).$$

1. Montrer que l'espace E est un espace vectoriel normé.
2. En écrivant la formule de Cauchy, et en l'approchant par une somme de Riemann, montrer que
$$f_{|K_\varepsilon} \in \overline{\langle f_\xi,\ \xi \in \Gamma\rangle},$$
où f_ξ désigne la fonction
$$\begin{array}{rccc} f_\xi & : & K_\varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \frac{1}{\xi - z}. \end{array}$$
3. En déduire qu'il suffit de montrer que $f_\xi \in \overline{F}$ pour tout $\xi \in \Gamma$ pour démontrer le résultat.
4. Montrer que si $|\xi| > \max\{|z|,\ z \in K_\varepsilon\}$, $f_\xi \in \overline{F}$.
5. Soit $\Lambda \in F^\circ$. On pose $g(\xi) := \Lambda(f_\xi)$. En développant $f_{\xi+h}$ en série entière dans la variable h, montrer que g est une fonction holomorphe, définie sur $\mathbb{C}\backslash K_\varepsilon$.
6. Montrer que $g(\xi) = 0$ pour $|\xi| > \max\{|z|,\ \ z \in K_\varepsilon\}$.
7. En déduire que $g(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma$.
8. Conclure.