Analyse 2, examen du 21 mai 2024

Rappels, notations.

- $(\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.
- Pour tout espace de fonctions F, l'espace $F_c \subset F$ désigne le sous-espace des fonctions à support compact.
- Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\hat{\hat{f}} = \frac{1}{(2\pi)^d}\tilde{f},$$
où $\tilde{f} = f(-\cdot)$.
- Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}\hat{g}$.
- $\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}$.
- $$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \exists g \in L^p(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega), \int_\Omega f \nabla\varphi = -\int_\Omega g\varphi\}.$$
- $\tau_h : L^p \to L^p$ définie par $\tau_h f(x) = f(x+h)$ pour $f \in \mathcal{C}^0 \cap L^p$ est bien définie, et $\tau_h f \xrightarrow[\|h\|\to 0]{L^p} f$.

On pourra utiliser les résultats du paragraphe précédent dans tout l'examen, et dans chaque exercice, les résultats des exercices précédents. On soignera la rigueur des arguments.

Exercice 1 : Soit $f(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^n \times [0,1])$ et
$$F(x) := \int_0^1 f(x,t)\mathrm{dt} = \int_0^1 f_t(x)\mathrm{dt}.$$

1. Montrer que $L^2_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f_n := f\mathbb{1}_{[-n,n]} \xrightarrow{L^2} f$.
3. Montrer que F est bien définie presque surement, et que $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
4. Montrer que
$$\hat{F}(\xi) = \int_0^1 \hat{f}_t(\xi)\mathrm{dt}.$$

Soit à présent $f \in L^2(\mathbb{R}^n \times [0,1])$, f désignant aussi un représentant de f parmi les fonctions de $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

5. Montrer $f_t(x) := f(t,x)$ est presque surement en t dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, que
$$F(x) := \int_0^1 f_t(x)\mathrm{dt}$$
est bien définie presque surement, et que $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

6. En raisonnant par densité, montrer que

$$\hat{F} = \int_0^1 \hat{f}_t \mathrm{dt}$$

Exercice 2 : On définit $f_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Calculer ou rappeler la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{dt}$.
2. Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f}_\varepsilon$ est une approximation de l'unité pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ (on peut utiliser la formule donnée en rappels).

Exercice 3 : Sobolev. Soit $v \in L^p(\Omega)$ et q l'exposant conjugué à p.

1. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\|v\nabla\varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

   Montrer que $v \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. On suppose qu'il existe une suite $v_n \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $\|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$ et $v_n \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} v$. Montrer que $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 4 : Image de $\mathcal{F}_{L^1}$ Dans cet exercice, on dénote $\mathcal{F}_{L^1}$ ou $\mathcal{F}_{L^2}$ les transformées de Fourier, respectivement définies sur les espaces $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les fonctions

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ (f,g) & \longmapsto & f \star g \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^1(\mathbb{R}) \\ (f,g) & \longmapsto & fg \end{array}$$

   sont bien définies et continues.
2. Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. En approchant f, g par des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que $f \star g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{F}_{L^1}(\hat{f}\hat{g}) = (2\pi)^2\tilde{f} \star \tilde{g}$.
3. Montrer que toute fonction L^1 est produit de deux fonctions L^2.
4. Montrer que

$$\operatorname{Im}\mathcal{F}_{L^1} = L^2(\mathbb{R}) \star L^2(\mathbb{R}).$$

5. Montrer que $\mathcal{F}_{L^1}$ est injective.
6. En déduire que si $\operatorname{Im}\mathcal{F}_{L^1} = \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, il existe $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c\|\hat{f}\|_\infty.$$

7. Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]})$ et montrer que $\mathbb{1}_{[-1,1]} \star \mathbb{1}_{[-n,n]} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, avec une borne uniforme sur sa norme.
8. En utilisant la question 6, en déduire que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) = L^2 \star L^2(\mathbb{R}) \neq \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : Equation de la chaleur. On considère l''EDP suivante : Etant donnée $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, trouver $u \in \mathcal{C}^2({\mathbb{R}_*^+}_t \times \mathbb{R}_x^d)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

On s'intéresse à l'existence d'une solution, et on commence par une partie analyse. On suppose que u et u_0 sont dans les classes de Schwartz afin de pouvoir utiliser tous les outils sur les transformées de Fourier. Dans tout l'exercice, on ne considèrera la transformée de Fourier que dans la variable x. Autrement dit, pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, on définit

$$\hat{f}(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x) \mathrm{dx}.$$

1. Montrer que
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -\|\xi\|^2 \hat{u}.$$
2. En déduire $\hat{u}$ en fonction de $\hat{u}_0$, puis u en fonction de u_0.

On revient à l'hypothèse de départ $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $\rho_t := \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{e^{-t\|\xi\|^2}}$ (dont on rappelle que c'est une approximation de l'unité par l'exercice 2) et on pose

$$u(x,t) = \rho_t \star u_0.$$

3. Montrer que $u(\cdot,t)$ est lisse pour $t > 0$.
4. Montrer que $u(x,\cdot)$ est lisse pour tout x sur $\mathbb{R}_*^+$.
5. Montrer que u vérifie $\partial_t u - \Delta u = 0$.
6. Montrer que $u(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0]{L^2(\mathbb{R}^d)} u_0$.
7. Quelle condition sur u_0 peut-on imposer pour assurer que u soit continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$?