Discussion préliminaire

Ds votre cursus, vous avez régulièrement été confronté à des équations du type

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction → algébrique (Polynôme)
→ ou pas ($\sin$, e, $\int$)

et x est une inconnue : $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{R}^n$.

Faisons le bilan de ce que vous avez appris concernant ces résolut°:

→ L'espace ds lequel on cherche à resoudre est primordial:

- Algébriquement : $ax+b=0$, $a,b \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{Q}$.
  ⤳ Corps
- Analyse: $x^2=2$: pas de solut° ds $\mathbb{Q}$ ⤳ $\mathbb{R}$
  ↳ Complétion de l'espace

→ Une fois l'espace approprié choisi, il faut des outils si on n'arrive pas à calculer une solut° algébrique smple:

- TVI
- Limites (on construit solut° comme série)
- On peut aussi chger le pb en 1 pb de pt fixe puis théorème du pt fixe de Banach
- Existence de minimums (⤳ Th de Rolle, ...)

Si maintenant on travaille avec des équat° fctionnelles:

$F(x, f) = 0$

ex: • Equadiffs $\dot{f}(t) = \vec{X}(f(t))$
• EDP : $\partial_t u - \Delta u = 0$ ou $\partial_t u + u \partial_x u = 0$.

Les m̄ pbs se posent:

Analyse fonctionnelle.
① . Espaces ds lesquels on peut espérer avoir des solut° (espaces complets adaptés à l'équat° fctionelle)
② . Outils d'existence de solut° à certains pbs ds ces espaces

But du cours: considérer des exples de ce qu'on peut dire sur ① et ②

Sur ① : • introduire des espaces fctionnels adaptés à un pb donné (complétions, L^p, Sobolev)

• Résultats d'approximations : selon le mode de défin° de votre espace, vous pouvez ne pas savoir a priori que les fct° lisses st denses. Pbs d'approximations : (Convolut°)

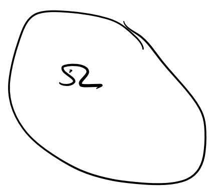
Sur ② • Résultat d'existence : Minimisat° de fctionelles convexes. Ppe : certaines EDP provenant de la φ ou géométrie, … s'énoncent en fait ĉ des pbs de minimisat° (ex : chercher une géodésique, ou le mvt d'un corps soumis à des forces extérieures).

• Qd l'algèbre le permet, construire des solut°
ex : équat° de la chaleur linéaire
↳ séries de Fourier
↳ Transformées de Fourier.

Formulation variationnelle d'EDP

1 - Motivation :

But du cours : utiliser tous les resultats d'analyse (fonctionnelle, Hilbert, ...) pour résoudre un vrai problème pratique :



. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

. trouver u telle que

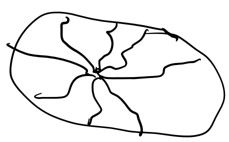
$$\begin{cases} \Delta u = g \\ u_{/\partial\Omega} = f . \end{cases}$$

Il s'agit d'une EDP, <u>linéaire</u> et <u>elliptique</u>. C'est très special et ce qu'on va faire ici ne se generalise pas facilement. Mais cela reste un problème tres important en physique.

Motivations physiques du problème :

Pb de Plateau

$-$ $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{/\partial\Omega} = f \end{cases}$ gouverne la répartition de T° ds un domaine dont le bord est amené à une certaine temperature.



L'experience dit : $\forall f$ continue, il doit y avoir une solution unique. La physique dit aussi comment calculer les solutions : Mouvement Brownien.

Eq de la Chaleur

$-$ $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u_{/\partial\Omega} = f \quad \text{ou} = f_t \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$ gouverne l'évolution de T° ds un domaine initialement à T° u_0, et auquel on impose une T° au bord à partir du tps 0.

Eq des ondes

$-$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$: equation des ondes : on a 1 membrane souple Ω dont le bord est attaché. Comment peut on faire vibrer Ω ?

Quelles vibrations forcées s'entretiennent, lesquelles sont detruites, ... ?

2. Formulation faible d'une EDP; argument formel.

$$\begin{cases} \Delta u = g \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$ disons $g \in C^0(\Omega)$, $f \in C^0(\partial\Omega)$. On cherche $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$.

Approche formelle : au sens des distributions :

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \leftarrow$ fct C^∞ à support compact ds Ω.
($\mathrm{Supp}\,\varphi := \overline{\{\varphi \neq 0\}}$).

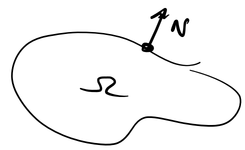
$$\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi = \int_\Omega g\varphi$$

or $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \mathrm{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_d}\end{pmatrix} = \mathrm{div}\,\nabla u.$$

De plus, $\mathrm{div}(\varphi \vec{X}) = \varphi\,\mathrm{div}\,X + \nabla\varphi \cdot \vec{X}$.
Donc :

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi = \int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\nabla u = \int_\Omega \mathrm{div}(\varphi\nabla u) - \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla u$$

Or $$\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{X} = \int_{\partial\Omega} \vec{X}\cdot\vec{N}\,d\sigma$$ où N = normale sortante.



Ici, $\varphi \equiv 0$ proche de $\partial\Omega$ donc

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\varphi\nabla u = \int_{\partial\Omega} \varphi\nabla u\cdot N\,d\sigma = 0.$$

Formulation variationnelle

Donc u est solution de $\Delta u = g$ ssi $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = -\int_\Omega g\varphi$$

① Formulation variationnelle.

Soit alors $\mathcal{F} : C^2(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longmapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v\|^2 + gv$

Calcul :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v+h) &= \int_\Omega \tfrac{1}{2}\|\nabla(v+h)\|^2 + g(v+h)\,dx \\
&= \int \tfrac{1}{2}\|\nabla v + \nabla h\|^2 + gv + gh \\
&= \int \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \nabla v\cdot\nabla h + \tfrac{1}{2}\|\nabla h\|^2 + gv + gh \\
&= \mathcal{F}(v) + \int \nabla v\,\nabla h + gh + \tfrac{1}{2}\int\|\nabla h\|^2 \\
&= \mathcal{F}(v) + \int \nabla v\,\nabla h + gh + o(\|h\|_{C^2})
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}$ est différentiable sur $C^2(\Omega,\mathbb{R})$, de différentielle

$$d\mathcal{F}(v) : h \longmapsto \int \nabla v . \nabla h + g h$$

Donc u solut° de $\Delta u = g \iff u$ est un point critique de $\mathcal{F}$

② intégration des contraintes au bord de l'espace de travail

En rappel : on veut aussi $u_{|\partial\Omega} = f$, donc ds cet esprit, on définit plutôt

$$\mathcal{F} : \underset{\{v \in C^2(\Omega,\mathbb{R}),\ v_{|\partial\Omega} = f\}}{C^2_f(\Omega,\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$= $ espace affine de $C^2(\Omega,\mathbb{R})$

Finalement :

u solut° du pb de Plateau de donnée f $\iff$ u pt critique de $\mathcal{F} : C^2_f(\Omega,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

② analyse de la fonctionnelle

Puis : $\mathcal{F}$ est convexe, continue et coercive (tend vers $+\infty$ en ∞)

③ $\mathcal{F}$!

Donc $\mathcal{F}$ a un unique point critique, qui est un minimum. Donc le pb de Plateau a une unique solution. $\square$

3 - Analyse des difficultés :

- ⓪ : La formulat° faible implique des IPP en dimension d, cad Stokes, Green-Ostrogradski, ...
- ① : le pb est le choix de l'espace. Ici :

$$\mathcal{F} : C^2_f(\Omega,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T C^2_f(\Omega,\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^2_0(\Omega,\mathbb{R}) = \text{fct° } C^2 \text{ qui valent } 0 \text{ au bord} \}$$

En effectivement, u vérifie $(*)$ alors $d\mathcal{F}(u) h = 0 \ \forall h \in T C^2_f$ (mais à vérifier).

- ② convexité OK, continuité OK, mais la coercivité n'est pas évidente :

On a $\int_\Omega \|\nabla v\|^2 + g v$.

Il est clair qu'il existe des suites de fct° v_n tq $\int \|\nabla v_n\|^2 \leq \Omega$, $\int v_n g \leq \int v_n^2 \int g^2 \leq \Omega$ ¢, mais

$\|v_n\|_\infty \longrightarrow +\infty$

Donc il faut changer l'espace de définition pour espérer la coercivité (celle-ci est nécessaire pour qu'1 fctionnelle cvxe ait 1 max : .

$\Longrightarrow$ on introduit des espaces :

$$\{v \,/\, \|v\|_{L^2}<+\infty \text{ et } \|\nabla v\|_{L^2}<+\infty \text{ et } v_{|\partial\Omega}=f\}.$$

$\hookrightarrow$ coercivité ds le bon espace

- ③ Une fctionnelle convexe coercive continue a un minimum :

  ds $\mathbb{R}^k$ c'est vrai parce que les boules sont compactes et la convexité est inutile.

  En dimension ∞, on utilise la convexité et le fait que l'espace est complet. Donc il faut compléter l'espace introduit ci-dessus :

  $$H^1_f(\Omega) := \overline{\{v\in C^2(\Omega),\ \|v\|_{L^2}<+\infty,\ \|\nabla v\|_{L^2}<+\infty,\ v_{|\partial\Omega}=f\}}.$$

  Donc existence et unicité de la solution.

- Nouveau pb apparait : $\begin{cases} u\in H^1_f(\Omega) \text{ est-elle } C^2(\Omega)\cap C^0(\bar\Omega)\,? \\ u_{|\partial\Omega}=f\,? \end{cases}$

  Régularité.

  <u>Question</u> : une fonction ds $H^1_f(\Omega)$ qui minimise la fctionnelle $\mathcal{F}$ est-elle automatiquement $C^2(\Omega)$?

4 - Bilan : une approche variationnelle aux EDP :

Etant donnée une edp $\begin{cases} F(x,u,\partial u,\dots,\partial^m u)=0 \\ u\in C^m(\Omega,\mathbb{R}) \text{ avec } \Omega\subset\mathbb{R}^k. \end{cases}$

On appelle solution forte toute solution du problème ci-dessus.

a) On cherche une formulation faible du problème : on raisonne au sens des distributions, et on écrit l'équation vérifiée par u au sens des distributions. Ceci fait intervenir des IPP, (donc des formules type Green-Ostrogradski...). Il s'agit d'une équation du type

$$A(u,\varphi)=0$$

avec $A(u,\cdot)$ linéaire en φ (faisant intervenir des dérivées de φ)

b) On cherche dans quel espace l'équation obtenue est bien posée et peut avoir une solution. En général il s'agit d' un espace de Sobolev, tout qu'à faire un H^k pour qu'il soit un Hilbert. On a alors typiquement :

$A : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec des bonnes propriétés : continuité.

Pour une approche variationnelle, on cherche à dire

$A(u, \varphi) = dJ(u)\varphi$ où $J : E \to \mathbb{R}$ avec des bonnes propriétés : coercivité, dérivabilité, ... convexité, ...

On dit que u est solution faible de (*) dans E si $A(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in E$.

c). En utilisant des propriétés adéquates de J dans E, on établit l'existence d'une solution faible de (*) dans E.

d) On démontre que toute solution faible, a priori dans E, est en fait n fois dérivable sur Ω.

e). On montre qu'une solution faible suffisament régulière (par exemple n fois dérivable) est en fait une solution forte.

Pour réaliser ce programme il faut donc :

- introduire ces espaces appropriés (Sobolev)
- Avoir des th d'existence de solut° faible (Lax-Milgram)
- Avoir des résultats de Regularité des solut° : typiquement : une solut° H^1_0 au pb avec $g \in C^k$ est en fait dans un espace H^{k+2}. (difficile)
- Avoir des résultats d'injection de ces Sobolev : si $k \gg 1$, $H^k \hookrightarrow C^2(\Omega)$. (difficile)

Une fois l'existence et l'unicité établie, il faut savoir comment calculer une solution :

- Analyse numerique

Et puis cette approche fonctionne pour le Laplacien mais pas pour la chaleur ou les ondes. On verra quand même comment utiliser les vp du Δ (analyse similaire) pour étudier ces pbs.