Théorie Hilbertienne, examen du 24 mai 2019

Rappel : Pour $I = [0,1]$,

$$\begin{aligned} H^1(I) &= \left\{ f \in L^2(I) \mid \exists g \in L^2(I), \int_0^1 u\varphi' = \int_0^1 g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathring{I}) \right\} \\ &= \overline{\mathcal{C}^\infty(I)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}} \end{aligned}$$

où $\|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}$. On note $u' := -g$ pour $u \in H^1(I)$.

Question de cours : Rappeler le théorème de Lax-Milgram.

Exercice 1 : Espaces de Sobolev. Soit $I =: [0,1]$. On définit

$$H^1_{0,d} := \overline{\mathcal{C}_c^\infty\big([0,1)\big)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}}.$$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}_c^\infty\big([0,1)\big)$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^2(I)} \sqrt{|x-y|} \qquad \forall x, y \in (0,1).$$

2. Montrer que $u \in H^1_{0,d}(I)$ a un représentant continu. Montrer que l'application qui à $u \in H^1_{0,d}(I)$ associe ce représentant continu est une injection compacte de $H^1_{0,d}(I)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ (on pourra au moins montrer la continuité de l'injection).
3. En utilisant la question précédente, montrer que si $u \in H^1_{0,d}(I)$, $u(1) = 0$. On admettra que $H^1_{0,d}(I) = H^1(I) \cap \{u(1) = 0\}$.
4. Montrer l'inégalité de Poincaré : si $u \in H^1_{0,d}(I)$, $\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$ où C est une constante. On notera par la suite

$$\frac{1}{\kappa} := \sup \left\{ \frac{\|u\|_{L^2(I)}}{\|u'\|_{L^2(I)}},\ u \in H^1_{0,d}(I) \right\}$$

5. En utilisant une fonction trigonométrique, montrer que $\kappa \leq \pi$.

Exercice 2 : Equation de Sturm-Liouville avec conditions de Neumann. On considère des fonctions $q, f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $y_0', y_1 \in \mathbb{R}$, avec $q \geq 0$, et le problème :

$$(\text{SLN})(q,f) \qquad \begin{cases} y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \\ -y'' + qy = f \\ y'(0) = y_0',\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

1. Trouver une fonction Λ telle que y est solution de (SLN) si et seulement si $\tilde{y} := y - \Lambda$ est solution de

$$(\text{SLN})_0(q, \tilde{f}) \qquad \begin{cases} \tilde{y} \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \\ -\tilde{y}'' + q\tilde{y} = \tilde{f} \\ \tilde{y}'(0) = \tilde{y}(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose dans un premier temps que y est solution de $(\text{SLN})_0(q,f)$.

2. Montrer que $y \in H^1_{0,d}(I)$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,1))$. Montrer que

$$\int y'\varphi' + qy\varphi = \int f\varphi.$$

4. En déduire que $y \in H^1_{0,d}(I)$ et que $\forall \varphi \in H^1_{0,d}(I)$,

$$(*) \qquad \int y'\varphi' + qy\varphi = \int f\varphi.$$

On ne suppose plus à présent que y est solution de $(\mathrm{SLN})_0(q,f)$.

5. Montrer que l'équation $(*)$ a une unique solution dans $H^1_{0,d}(I)$. On notera y cette solution.
6. On pose $u := y' \in L^2(I)$. Montrer que la dérivée de u au sens des distributions est $u' = qy - f$. En déduire que $u \in H^1(I)$.
7. En déduire que $y \in H^2(I)$, et en posant $v := y'' \in L^2(I)$, montrer que $v \in H^1(I)$. En déduire que $y \in \mathcal{C}^2(I)$.
8. Montrer que $\forall \varphi \in H^1_{0,d}(I)$ (pour laquelle on rappelle que $\varphi(0)$ est bien défini),

$$y'(0)\varphi(0) + \int_I \big(-y'' + qy - f\big) = 0.$$

9. En considérant une suite de fonctions φ_n adaptées, montrer que $y'(0) = 0$. Montrer alors que $-y'' + qy = f$.
10. Montrer qu'il existe une solution à $(\mathrm{SLN})_0(q,f)$, donc à $(\mathrm{SLN})(q,f)$.
11. En utilisant l'approche ci-dessus, montrer que le théorème de Lax-Milgram implique l'unicité de la solution du problème $(\mathrm{SLN})(q,f)$ si $q > -\kappa^2$.
12. En déduire que pour $q > -\kappa^2$, 0 est l'unique solution de $(\mathrm{SLN})_0(q,0)$, puis que $\kappa = \pi$.

On étudie à présent l'unicité de la solution de (SLN) par une approche de principe du maximum, donc sans introduire d'espaces de Sobolev. On suppose pour simplifier que $q > 0$. Soient y_1, y_2 deux solutions de $(\mathrm{SLN})(q,f)$. On pose $u := y_1 - y_2$.

13. Quelle équation u vérifie-t'elle ?
14. En déduire que $\max(u) \geq 0$ et $\min(u) \leq 0$.
15. On suppose $u(x_0) = \max(u) > 0$. Montrer que $u'(x_0) = 0$ et que $u''(x_0) > 0$. En déduire une contradiction.
16. Raisonner de même pour le minimum. En déduire que $u = 0$, donc que $y_1 = y_2$.

On ne suppose plus que $q > 0$ sur I. Quitte à échanger y_1 et y_2, on peut supposer $y_1(0) \geq y_2(0)$, de sorte que $u(0) \geq 0$.

17. Rappeler l'équation différentielle vérifiée par u. En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que si $u(0) = 0$, $u \equiv 0$.
18. On suppose donc que $u(0) > 0$. On définit $F := \{x \in I,\ u(x) \geq 0\}$ et J la composante connexe de 0 dans F. Montrer que J est un intervalle fermé non vide.
19. Montrer que u est convexe sur J. En déduire que u est croissante sur J.
20. En déduire une contradiction, puis l'unicité du problème de Sturm-Liouville avec conditions de Neumann.