

TD 4 : Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle que $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions α -Hölder, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u(x)| + \sup\left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha}, x, y \in \Omega, x \neq y \right\}.$$

Le but principal de cette feuille d'exercice est de démontrer une injection de Sobolev :

Théorème 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné. Soit $p > d$, $p \in \mathbb{N}$. Alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{1-\frac{d}{p}}(\Omega)$, et il existe une constante $C(p, d, \Omega)$ telle que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{(1-\frac{d}{p})}(\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (1)$$

Les deux premiers exercices sont des préliminaires techniques dont on a besoin dans l'exercice 3, qui démontre le théorème 1. L'exercice 4 explique une conséquence sur un théorème d'injection similaire sur les $H^k(\Omega)$.

Exercice 1 : Quelques critères de régularité Sobolev. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $v \in L^2(\Omega)$.

1. On suppose qu'il existe $v_n \in H^1(\Omega)$ telle que $v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v$ et $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Montrer que $v \in H^1(\Omega)$.
2. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left\| v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Montrer que $v \in H^1(\Omega)$.

Exercice 2 : Un exercice technique préliminaire. On rappelle le théorème du changement de variable : si $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, dont les dérivées sont bornées,

$$\forall f \in L^1(\Omega'), \quad \int_{\Omega} f \circ \Phi |\text{Jac}(\Phi)| d\lambda = \int_{\Omega'} f d\lambda.$$

1. Montrer que si les dérivées de Φ^{-1} sont aussi bornées, $\forall f \in L^1(\Omega')$,

$$\int_{\Omega} f \circ \Phi d\lambda = \int_{\Omega'} f |\text{Jac}(\Phi^{-1})| d\lambda$$

2. Montrer à présent que si les dérivées de Φ ou Φ^{-1} ne sont plus supposées bornées, mais qu'on suppose seulement $\text{Jac}(\Phi)$ est $L^q(\Omega)$ (respectivement, $\text{Jac}(\Phi^{-1}) \in L^q(\Omega')$), alors les égalités ci-dessus sont valables pour $f \in L^p(\Omega)$.

On considère à présent l'application

$$\begin{aligned} \Phi : (-1, 1) \times B^{d-1}(1) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, y) &\longmapsto \left(t, y \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right). \end{aligned}$$

3. Montrer que Φ définit un difféomorphisme sur son image, que l'on note $\mathcal{B}$. Montrer que $\text{Jac}(\Phi) > 0$ est borné sur $(-1, 1) \times B^{d-1}(1)$, mais que $\text{Jac}(\Phi^{-1}) > 0$ n'est pas borné sur $\mathcal{B}$.
4. Montrer que

$$\|\text{Jac}(\Phi^{-1})\|_{L^q(\mathcal{B})}^q = \int_{(-1,1) \times B^{d-1}(1)} \frac{d\lambda}{|\text{Jac} \Phi|^{q-1}} = \int_{(-1,1) \times B^{d-1}(1)} \frac{dtdy}{\left(\cos \frac{\pi}{2}t\right)^{(d-1)(q-1)}}.$$

5. En déduire que pour q tel que $(q-1)(d-1) < 1$, $\text{Jac}(\Phi^{-1}) \in L^q(\mathcal{B})$.

Exercice 3 : Régularité Hölder des fonctions de classe Sobolev. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1. On commence par quelques remarques.

1. Montrer que le théorème implique que pour $p > d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ avec injection compacte.
2. Montrer qu'il suffit de montrer qu'il existe $C(p, d) \in \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\forall x, y \in \Omega, x \neq y, \quad |u(x) - u(y)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|x - y\|^{1-\frac{d}{p}}. \quad (2)$$

Indication : si cette inégalité est vérifiée, u ne varie pas beaucoup sur Ω puisque Ω est borné, donc si $\|u\|_{\infty, \Omega}$ est grand, $|u(x)|$ est grand pour $x \in \Omega$, et il en va de même pour $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

3. En utilisant l'opérateur de prolongement, montrer qu'il suffit de montrer l'inégalité (2) pour $\Omega = \mathbb{R}^d$.
4. Montrer qu'il suffit de montrer l'équation (2) pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
5. On suppose à présent démontré que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad |f((-1, \mathbf{0}) - f(1, \mathbf{0}))| \leq C(p, d) \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (3)$$

Montrer que l'équation (2) est valide pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Dans la suite de cet exercice, on fixe $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et on cherche une constante $C(p, d)$ indépendante de f , pour laquelle l'inégalité (3) est vérifiée. Pour $y \in B^{d-1}(1)$, on pose $\gamma_y(t) := (t, y \cos(\frac{\pi}{2}t))$.

6. Montrer que $\gamma_y(-1) = (-1, \mathbf{0}) =: x$ et $\gamma_y(1) = (1, \mathbf{0}) =: y$. En déduire que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_{-1}^1 \|\nabla f(\gamma_y(t))\| dt,$$

puis que

$$|f(x) - f(y)| \leq C' \int_{B^{d-1}(1)} \int_{-1}^1 \|\nabla f(\gamma_y(t))\| dt dy,$$

où C et C' sont des constantes que l'on déterminera.

7. En déduire que

$$|f(x) - f(y)| \leq C' \int_{\mathcal{B}} \|\nabla f\| \text{Jac}(\Phi^{-1}) d\lambda.$$

8. En utilisant l'inégalité de Hölder généralisée et l'exercice précédent, montrer que si $p > d$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C' \|\nabla f\|_{L^p(\mathcal{B})} \|\text{Jac} \Phi^{-1}\|_{L^q(\mathcal{B})} < +\infty.$$

9. Conclure.

Exercice 4 : injection de Sobolev pour $H^k(\Omega)$. On admettra ici le résultat suivant :

Lemme 2 Si $p < d$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ (donc $p^* > p$).

Déduire du théorème 1 et de ce lemme le théorème suivant :

Théorème 3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné. Alors pour $k > \frac{d}{2} - 1$, $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, avec injection compacte.