TD 5: Les vraies solutions du Laplacien

Le but de l'étude à suivre est de comprendre l'équation du Laplacien avec condtions de Dirichlet : Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à bord lisse, $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de régularité à préciser :

$$\mathcal{L}(\Omega, f, g) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = g(x) & \forall x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$$

On va décomposer le problème en $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$ et $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$

1 Le problème $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$

On rappelle qu'on a établi dans le TD3 que le problème $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$ admet une unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$, dès que $g \in L^2(\Omega)$. Si cette solution faible est de plus dans $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, alors u est solution forte.

On admet les résultats suivants :

Théorème (Régularité elliptique)**.** *Si $g \in H^k(\Omega)$, la solution faible de $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$ est dans $H^{k+2}(\Omega)$.*

Théorème (Régularité des classes de Sobolev)**.** *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $H^{p+k}(\Omega) \subset \mathcal{C}^p(\overline{\Omega})$ avec injections compactes dès que $k > d/2$.*

2 Le problème $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$

On veut démontrer dans cette partie le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une fonction $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ qui vérifie*

$$\mathcal{E}(\Omega, f) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \forall x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$$

Cette fonction est appelée solution de $\mathcal{E}(\Omega, f)$

On admettra qu'il existe une fonction continue à support compact $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui prolonge f, et par conséquent qu'il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $f_{n|\partial\Omega}$ converge uniformément vers f.

Exercice 1 : Fonctions harmoniques et propriété de la moyenne. Soit $u : B(1) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $S(r)$ la sphère de rayon r et $d\sigma$ la mesure sur $S(1)$, S son volume $d-1$-dimensionnel. La mesure sur $S(r)$ est $r^{d-1}d\sigma$. On définit

$$m(r) := \frac{1}{r^{d-1}S} \int_{S(r)} u d\sigma.$$

1. Montrer que $m(r) = \dfrac{1}{S} \displaystyle\int_{S(1)} u(r\xi) d\sigma(\xi)$.

2. En appliquant soigneusement le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, en déduire que

$$m'(r) = \frac{1}{S}\int_S (1)\frac{\partial u}{\partial r}(r\xi)\cdot\xi d\sigma = \frac{1}{Sr^{d-1}}\int_{S(r)} \nabla u\cdot\vec{d\sigma}.$$

3. En utilisant la formule de Green, montrer que

$$m'(r) = \frac{1}{Sr^{d-1}}\int_{B(r)} \mathrm{div}\,(\nabla u)d\lambda = \frac{1}{Sr^{d-1}}\int_{B(r)} \Delta u\, d\lambda = 0.$$

4. En déduire que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne : $\forall x \in \Omega$, $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$, on a

$$u(x) = m(f, S(r)) := \frac{1}{Sr^{d-1}}\int_{S(x,r)} u d\sigma.$$

5. En déduire le *principe du maximum* pour les fonctions harmoniques : si u est harmonique sur Ω et atteint son maximum en un point de Ω, alors u est constante.
6. En déduire en particulier que le problème $\mathcal{E}(\Omega, f)$ admet au plus une solution.

On veut à présent montrer qu'une fonction qui vérifie la propriété de la moyenne sur un ouvert est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et qu'elle est donc harmonique. Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété de la moyenne. Soit $\Omega_r := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > r\}$.

7. Soit $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ une fonction qui ne dépend que de la distance à l'origine, d'intégrale 1, et à support dans $B(0,r)$. Montrer que pour tout $x \in \Omega_r$, $u(x) = u \star \rho(x)$.
8. En déduire que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_r, puis que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, et qu'elle est harmonique.

Exercice 2 : Un cas particulier du théorème 1. Soit $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. On veut résoudre $\mathcal{E}(\Omega, f = \tilde{f}_{|\partial\Omega})$.

1. Montrer que le problème $\Delta u = -\Delta\tilde{f}$ a une solution faible v dans $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer que $\Delta\tilde{f}$ est dans $H^k(\Omega)$ pour tout k. En déduire que $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.
3. En déduire que $\mathcal{E}(\Omega, f)$ a une solution, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

Exercice 3 : Le cas général du théorème 1. On veut démontrer maintenant que le résultat de l'exercice précédent est suffisant pour déduire le théorème dans toute sa généralité. Soit donc Ω, f comme dans le théorème 1, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur $\partial\Omega$.

1. Soit u_n des solutions de $\mathcal{E}(\Omega, f_n)$. En utilisant le principe du maximum, montrer que u_n converge uniformément vers une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que u vérifie la propriété de la moyenne sur Ω.
3. En déduire que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, est harmonique dans Ω, et vérifie $u_{|\partial\Omega} = f$.

3 L'équation de Laplace

On revient à présent à l'équation $\mathcal{L}(\Omega, f, g)$.

Exercice 4 : On suppose $g \in H^k(\Omega)$, $k > \frac{d}{2}$.

1. En utilisant la linéarité de l'équation, décomposer le problème $\mathcal{L}(\Omega, f, g)$ en $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$ et $\mathcal{E}(\Omega, f)$.
2. En déduire que $\mathcal{L}(\Omega, f, g)$ a une solution qui est la somme d'une fonction harmonique $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et d'une fonction $v \in H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Montrer que cette décomposition est unique.
3. On rappelle que lorsque $k > \frac{d}{2}$, $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Montrer que cela implique que $v \in C^2(\overline{\Omega})$.
4. En déduire l'existence d'une solution forte de $\mathcal{L}(\Omega, f, g)$.
5. En utilisant la linéarité de $\mathcal{L}(\Omega, f, g)$ et l'exercice 1 ci-dessus, montrer l'unicité d'une telle solution.