TD 6 : Spectre des opérateurs auto-adjoints compacts

H désigne un espace de Hilbert, $A : H \to H$ un endomorphisme auto-adjoint et compact :

- $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \ \forall u, v \in H$,
- $A(B(0,1))$ est relativement compact dans H.

L'espace $\mathcal{L}(H)$ est muni de la norme d'opérateur associée à la norme Hilbertienne sur H :

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Le spectre d'un opérateur est défini par

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible.}\}$$

Et l'ensemble des valeurs propres de A est

$$\mathrm{VP}\,(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \neq 0,\ Ax = \lambda x\}.$$

Exercice 1 : Généralités sur le spectre

1. Prouver que $\mathrm{VP}\,(A) \subset \sigma(A)$.
2. Prouver que que si A est inversible et continue, alors A^{-1} est continue (indication : théorème de l'application ouverte).
3. Prouver que si A est inversible, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A + h$ est inversible pour $\|h\| < \varepsilon$.
4. En déduire que $\sigma(A)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
5. Trouver un espace de Hilbert et un opérateur continu $T : H \to H$ tel que $\sigma(T) \neq \mathrm{VP}\,(T)$ (En l'absence d'idée, on pourra considérer $H = \ell^2(\mathbb{R})$).

Exercice 2 : Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact et $\lambda \in \sigma(A)\backslash 0$. On veut montrer que $\lambda \in \mathrm{VP}\,(A)$.

1. Si $A - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas injective, montrer que $\lambda \in \mathrm{VP}\,(A)$.

On suppose à présent que $A - \lambda\mathrm{Id}$ est injective, mais pas surjective. On pose $H_1 = \mathrm{Im}\,(A - \lambda\mathrm{Id}\,)$, $H_2 = A - \lambda\mathrm{Id}\,(H_1)$, ...

2. Montrer que $H_n \subsetneq H_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq H_1 \subsetneq H$.
3. Construire une suite $x_n \in H_n$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, H_{n+1}) = 1$.
4. Montrer que $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \lambda \ \forall n \neq m$ Indication : écrire $A = \lambda\mathrm{Id} + (A - \lambda\mathrm{Id}\,)$.
5. En déduire une contradiction, et donc que $\lambda \in \mathrm{VP}\,(A)$.

Exercice 3 : Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, $\ker A - \lambda_{\mathrm{Id}}$ est de dimension finie.

Soit $\lambda_n \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$.

1. En supposant les λ_n distinctes, montrer que les sous-espaces $E_n := \ker(A - \lambda_n\mathrm{Id}\,)$ sont deux à deux orthogonaux.
2. En déduire l'existence de $x_n \in E_n$ de norme 1 tels que $d(x_n, \oplus_{k\neq n})E_k) = 1$.
3. Montrer que $\|Ax_n - Ax_m\| \geq |\lambda_n|\|x_n - x_m\|$.
4. En déduire que $\lambda = 0$, autrement dit que $\sigma(A)\backslash\{0\}$ est discret.
5. En déduire qu'un tel opérateur a un nombre au plus dénombrable de valeurs propres.

Exercice 4 : Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact non nul.

6. Montrer que la fonction $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ n'est pas nulle.

Quitte alors à remplacer A par $-A$, on peut supposer que $\lambda := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle < 0$. On veut montrer que $\lambda \in \sigma(A)$. On pose $a(u, v) := \langle Au - \lambda u, v$.

7. Montrer que $a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique positive et continue.
8. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Scwhartz et la continuité, montrer l'existence d'une constante C telle que
$$\forall v, \quad a(u, v) \leq Ca(u, u)^{\frac{1}{2}} \|v\|$$
9. En déduire que $\|Au - \lambda u\| \leq C\langle Au - \lambda u, u\rangle$.

Soit alors u_n de norme 1 telle que $\langle Au_n, u_n\rangle \to \lambda$. Quitte à extraire, on peut supposer que Au_n converge vers $v \in H$.

10. En remarquant que $\langle Au_n - \lambda u_n, u_n\rangle \to 0$, montrer que $\|Au_n - \lambda u_n\|$ tend vers 0, puis que v est un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ.

Exercice 5 : Soit H un espace de Hilbert séparable et $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact. Si $\lambda \in \mathrm{VP}\,(A)$, on pose $E_\lambda := \ker(A - \lambda \mathrm{Id}\,)$.

1. Montrer que $E_0 := \ker A$ est séparable et admet une base Hilbertienne.
2. Soient λ, λ' deux valeurs propres distinctes de A. Montrer que $E_\lambda \perp E_{\lambda'}$.
3. Montrer que l'espace $H' := \oplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$ est dense dans H. Indication : si ce n'est pas le cas, l'orthogonal de cet espace est non nul, et on montrera que A préserve cet orthogonal et y admet un vecteur propre.
4. Montrer finalement que H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de A.

Exercice 6 : Un exemple : le spectre du Laplacien Soit Ω un domaine borné à bord lisse, et $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ le Laplacien.

1. Montrer que Δ est un opérateur auto-adjoint continu inversible. On note Δ^{-1} son inverse.
2. Soit $i : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. On rappelle que i est un opérateur compact. Montrer que $A := i \circ \Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est un opérateur auto-adjoint compact.
3. Montrer que $0 \in \sigma(A) \backslash \mathrm{VP}\,(A)$.
4. En déduire qu'il existe une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de valeurs propres de A.
5. En déduire qu'il existe une suite $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ et une base Hilbertienne φ_n de $L^2(\Omega)$ telles que $\Delta\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$.
6. Montrer que $\varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
7. En appliquant les théorèmes de régularité elliptique, montrer que $\varphi_n \in H^k(\Omega)$ pour tout k, et donc que $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi_{n|\partial\Omega} = 0$.
8. En effectuant une intégration par partie, montrer que $\lambda_n > 0$ $\forall n$.
9. Déterminer φ_n lorsque $\Omega = [0, 1]$.