TD 1 : Analyse fonctionnelle des espaces L^p

Petit syllabus sur les espaces L^p

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (éventuellement $\Omega = \mathbb{R}^n$) et μ sa mesure de Lebesgue. Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω qui vérifient l'inégalité

$$\|f\|_{L^p} := \int_\Omega |f|^p < +\infty.$$

Pour $p = +\infty$, on définit $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω qui ont un représentant ayant une borne finie sur un ensemble de mesure totale. On définit également pour $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leq M \text{ p.s.}\}$$

Voici une liste des propriétés principales de ces espaces :

(A) $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$..

(B) $\big(L^p(\Omega, \|\cdot\|_{L^p})\big)$ est un espace de Banach,

(C) $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$. On peut donc voir $L^p(\Omega)$ comme le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour cette norme.

(D) Pour $p \in]1, +\infty[$, $L^p(\Omega)$ est séparable et réflexif. Pour rappel, un espace E est séparable si il contient une partie dénombrable dense. Il est réflexif si l'application

$$\begin{array}{rccl} J & : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & & e & \longmapsto & \big(\Lambda \in E^* \mapsto \Lambda(e)\big) \end{array}$$

est surjective (elle est alors bijective).

(E) Le dual de $L^p(\Omega)$ est isométrique à $L^q(\Omega)$, *via* l'application

$$\begin{array}{rccl} T & : & L^q(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega)^* \\ & & g & \longmapsto & \left(f \mapsto \displaystyle\int_\Omega fg d\mu\right). \end{array}$$

Dans sa version la plus générale, ce point nécessite (D).

Le but de ce TD est de prouver une partie des résultats ci-dessus. Précisément, les points (A), (B), et (E) dans la mesure du possible. Le point (C) sera prouvé en cours, dans le chapitre sur la convolution. Le point (D) ne sera pas abordé dans ce cours.

1 Les espaces $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}\big)$

Exercice 1 : $L^\infty(\Omega)$. Montrer (A) et (B) quand $p = +\infty$.

Exercice 2 : Inégalité de Minkowski. Le but est de démontrer que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$ pour $p < +\infty$.

1. Montrer l'inégalité de Minkowski : si f et g sont mesurables sur Ω,

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indication : on pourra poser $f' = \frac{f}{\|f\|}$, $g' = \frac{g}{\|g\|}$, calculer $\frac{\|f+g\|}{\|f\|+\|g\|}$ et utiliser une inégalité de convexité. Une autre solution classique passe par l'inégalité de Hölder.

2. En déduire que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

Exercice 3 : Complétude. On démontre ici que $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}\big)$ est complet pour $p < +\infty$. On considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite de (f_n) converge dans $L^p(\Omega)$.
2. Extraire une sous-suite $(\tilde{f}_k) = (f_{n_k})$ qui vérifie $\|\tilde{f}_k - \tilde{f}_{k+1}\|_{L^p} < \frac{1}{2^k}$. On pose

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|.$$

3. En remarquant que $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$ pour tout n, montrer que $g_n(x)$ converge presque surement vers une limite finie, qu'on appellera $g(x)$. En déduire que $\tilde{f}_k(x)$ converge aussi p.s. vers une limite finie, appelée $f(x)$.
4. Montrer que g est L^p et que g_n converge vers g dans $L^p(\Omega)$.
5. Montrer que $|f(x) - \tilde{f}_k(x)| \leq g(x)$ p.s.et en déduire que $f \in L^p(\Omega)$.
6. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\tilde{f}_k \xrightarrow{L^p} \tilde{f}$.

Exercice 4 : Inégalités intermédiaires.

1. Montrer que si $\mathrm{Vol}(\Omega) < +\infty$ alors $L^p(\Omega) \subsetneq L^{p'}(\Omega) \ \ \forall p' \leq p$.
2. Pour $p' < p$, montrer qu'aucune des inclusions $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ou $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ n'est vraie.
3. Soit à présent $p < s < p'$. Montrer qu'il existe $\mu \in [0,1]$ tel que $\forall y > 0$, $y^s \leq \mu y^p + (1-\mu) y^{p'}$. En déduire que quel que soient Ω, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ alors $f \in L^s(\Omega)$ pour tout $s \in [p, p']$.

Exercice 5 : Inégalité de Hölder. Le but est de montrer l'inégalité de Hölder : si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables et si $p, q, r \in \mathbb{R}_+$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1. On considère d'abord le cas $r = 1$. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu.$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder pour $r = 1$, d'abord lorsque $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)} = 1$, puis dans le cas général.
3. Reprendre la preuve précédente pour établir l'inégalité de Hölder pour $r \in \mathbb{R}^+$.
4. Considérer finalement le cas où l'un ou plusieurs des indices p, q, r sont $+\infty$.

2 Dual de $L^p(\Omega)$.

La démonstration du point (E) est assez difficile. Elle nécessite en toute généralité un travail préliminaire sur les espaces réflexifs qui sort du cadre de ce cours. Les exercices suivants établissent certains cas particuliers plus faciles de cette dualité, ou établissent cette dualité dans le cas général, modulo les résultats nécessaires de réflexivité. Dans toute la suite, on convient que p, q sont conjugués l'un à l'autre ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et on définit T par la formule donnée en (E).

On rappelle que le dual d'un espace de Banach X est un espace de Banach pour la norme $\|\Lambda\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X=1} \Lambda(x)$. Plus généralement, si X, Y sont deux espaces de Banach, l'espace des applications linéaires continues $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach pour la norme $\|u\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|u(x)\|_Y$.

Exercice 6 : Quelques remarques générales sur T.

1. Montrer que T est bien défini et prend effectivement ses valeurs dans $L^p(\Omega)^*$. Ceci signifie que $T(f)(g)$ est bien défini et réel pour tout $f \in L^q(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T(f)g\| < C\|g\|_{L^p}$ $\forall g \in L^p(\Omega)$. Quelle est cette constante ?
2. Montrer que $\|T(f)\| = \|f\|_{L^q(\Omega)}$. En déduire que T est une application linéaire continue isométrique, donc injective.
3. Montrer (E) pour $p = 2$ (Indication : Riesz).

Exercice 7 : Dual de $L^p(\Omega)$ pour Vol$(\Omega) < +\infty$ et $1 < p < 2$. On donne à présent une preuve complète de (E) lorsque Ω est de volume fini et $1 < p < 2$, ce qu'on suppose dans toute la suite de l'exercice.

1. Montrer que le conjugué $q = p(q-1)$ (vérifiant ${}^1\!/_p + {}^1\!/_q = 1$) vérifie $q > 2$. Montrer également que
$$\|\cdot\|_{L^p} \lesssim \|\cdot\|_{L^2} \lesssim \|\cdot\|_{L^q},$$
$$L^q(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$
2. Soit $\Lambda \in L^p(\Omega)^*$. Montrer qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ telle que
$$\forall f \in L^2(\Omega),\ \Lambda(f) = \int_\Omega fg\,d\mu.$$
3. Montrer que $f_k := g|g|^{q-2}\mathbf{1}_{\{|g|<k\}}$ est dans $L^2(\Omega)$. En utilisant le fait que $\Lambda(f) \leq \|\Lambda\|\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$, montrer que
$$\left(\int_{|g|<k} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\Lambda\|.$$
4. En déduire que $g \in L^q(\Omega)$, et que $\Lambda = T(g)$.
5. Conclure que T est surjective.

Exercice 8 : Convexité uniforme de L^p lorsque $p > 2$. On choisit $p > 2$ et on définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & f & \longmapsto & \|f\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f|^p d\mu \end{array}$$

Soit aussi $f \in L^p(\Omega)\backslash\{0\}$ et $h \in L^p(\Omega)$, pour lesquels on choisit des représentants encore notés $f, h : \Omega \to \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{array}{l} A := \{x \in \Omega \mid |h(x)| < |f(x)|\} \\ B := \{x \in \Omega \mid |h(x)| \geq |f(x)|\} \end{array}$$

Ce sont évidemment des ensembles mesurables.

1. Majorer les intégrales de $|f|^p$, $|f+h|^p$, $|f|^{p-1}|h|$ et $|f|^{p-2}|h|^2$ sur B par $\mathcal{O}(\|h\|_{L^p}^p)$.
2. Montrer que
$$\int_A |f+h|^p d\mu = \int_A |f|^p + p\int_A \operatorname{Sgn}(f)|f^{p-1}|h d\mu + R(h,f),$$
où $|R(h,f)| < C\|h\|_{L^p}^p$.
3. En déduire que ψ est différentiable en f, de dérivée
$$d_f\psi(h) = p\int_\Omega \operatorname{Sgn} f|f|^{p-1} h d\mu.$$
4. En déduire en particulier que $d_f\psi$ est surjective pour $\|f\|_{L^p} = 1$. Autrement dit, ψ est une submersion au voisinage de la sphère unité.
5. Raisonner de façon analogue pour démontrer que f est deux fois dérivable en $f \neq 0$, et que sa Hessienne est donnée par
$$d^2\psi(f)(h_1,h_2) = p(p-1)\int_\Omega |f|^{p-2}h_1h_2 d\mu.$$
6. En déduire que ψ est convexe, mais montrer aussi que la Hessienne de ψ n'est pas partout définie positive.
7. Inégalité de Clarkson (H. Brezis, "Analyse Fonctionnelle") :
   - Montrer que $\forall x > 0$, $(x^2+1)^{\frac{p}{2}} \geq x^p + 1$.
   - En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 0$, $(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{p}{2}} \geq \alpha^p + \beta^p$.
   - En appliquant l'inégalité précédente pour $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$, montrer l'inégalité de Clarkson :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$
8. En déduire que
$$\psi\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(\psi(f)+\psi(g)\big) - \frac{1}{2}\|f-g\|_{L^p}^p.$$
9. Montrer que L^p est uniformément convexe :
$$\forall \delta, \exists \varepsilon > 0, \mid \forall x, y \in S_{L^p}(1), \ \|x-y\|_{L^p} > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Exercice 9 : Dual de $L^p(\Omega)$ pour $p > 2$. On utilisera le résultat de l'exercice précédent : Pour $p > 2$, la norme L^p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $L^p(\Omega)\backslash\{0\}$ et L^p est uniformément convexe :

$$\forall\delta, \exists\varepsilon > 0, \mid \forall x, y \in S_{L^p}(1), \ \ \|x - y\|_{L^p} > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

1. Montrer que $1 < q < 2$.
2. Soit $\Lambda \in L^p(\Omega)^*$, $\|\Lambda\| = 1$. Montrer qu'il existe un unique $f_\Lambda \in L^p(\Omega)$ telle que $\|f_\Lambda\| = 1$ et $\Lambda(f_\Lambda) = 1$.
3. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda = \alpha d_{f_\Lambda}\|\cdot\|_{L^p}$.
4. En déduire que si $f_{\Lambda_1} = f_{\Lambda_2}$ alors $\Lambda_1 = \Lambda_2$.
5. Pour $f \in L^p(\Omega)$, trouver un élément $g \in L^q(\Omega)$ tel que $f_{T(g)} = f$.
6. En conclure que T est surjective.