

# Méthodes de construction de jeux de tuiles apériodiques sur grilles hexagonales

---

Stage de 2<sup>ème</sup> année

effectué au Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans



Magistère de Mathématiques

UFR de Mathématique et d'Informatique

Université de Strasbourg

**Thomas Saigre**

sous la direction de

**Martin DELACOURT & Nicolas OLLINGER**

Du 11 juin au 19 juillet 2019

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et remerciements</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Définitions et premiers exemples</b>	<b>4</b>
2.1	Tuiles de Wang . . . . .	4
2.2	Pavage hexagonal . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Substitutions</b>	<b>6</b>
3.1	Définitions et théorèmes . . . . .	6
3.2	Substitution $3 \times 3$ . . . . .	9
3.3	Les hexagones : première tentative . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Substitution combinatoire</b>	<b>14</b>
4.1	Définition de la substitution . . . . .	14
4.2	Décoration . . . . .	15
4.3	Résultats . . . . .	16
4.4	Construction du jeu de tuiles avec <code>OCaml</code> . . . . .	17
4.5	Minimalité du jeu de tuiles . . . . .	17
4.6	Représentation graphique du pavage . . . . .	18
4.7	Soficité de l'ensemble limite . . . . .	20
	<b>Références</b>	<b>22</b>

## 1 Introduction et remerciements

Je voudrais commencer par remercier Martin Delacourt et Nicolas Ollinger, mes deux maîtres de stage, qui m'ont bien aidé et aiguillé durant ces six semaines, et aussi dans la relecture de ce mémoire. Je remercie aussi toute l'équipe du LIFO qui m'a accueilli pour ce stage.

Bien que les notions abordées durant ce stage étaient au départ assez complexes à appréhender, j'ai trouvé le sujet passionnant à traiter, que ce soit dans la partie théorique et dans la partie pratique avec la visualisation des pavages. Malgré ce que disait l'ami chez qui j'ai logé à Orléans, j'ai fait bien plus que de la « mosaïque » ; même si le principe de bases des pavages s'en rapproche, la théorie qui est derrière et les théorèmes qui en découlent vont beaucoup plus loin que cela ! Je trouve impressionnant le fait qu'à partir de problème dont l'énoncé est a priori simple, comme le problème du pavage par exemple (cf ci-dessous), on peut arriver à des résultats aussi complexes que ça.

Un pavage carré est une manière de remplir le plan avec des carrés colorés, appelé tuiles (où le nombre de coloriages possibles est fini), de sorte que les couleurs de deux côtés adjacents soient identiques, comme un puzzle. On peut généraliser ce principe à d'autres formes de cases, dans ce rapport, on se contentera d'une forme régulière : l'hexagone. Avec cette simple règle, on va chercher à créer des structures complexes, tels que des pavages apériodiques. Un pavage est apériodique s'il ne possède aucune période, c'est-à-dire si aucun motif de ces tuiles ne se répète une infinité de fois.

Dans ce mémoire, on verra dans un premier temps les définitions formelles des pavages et de la périodicité. Ensuite viendra une première construction d'un jeu de tuiles carrées apériodique, puis une autre construction avec cette fois-ci des tuiles hexagonales.

Ces constructions utiliseront toutes deux des substitutions, c'est-à-dire des applications qui à une tuile associent un ensemble de tuiles, de sorte que l'image d'un pavage par une telle substitution pave encore le plan. L'idée sera d'appliquer la substitution une infinité de fois, car si celle-ci vérifient certaines conditions, les pavages ainsi obtenus auront des propriétés intéressantes, telle que l'apériodicité.

## 2 Définitions et premiers exemples

### 2.1 Tuiles de Wang

On cherche ici à paver le plan par des *tuiles de Wang* : des tuiles carrées dont les arêtes sont coloriées. Ces couleurs sont appelées NORD, EST, SUD et OUEST. Les couleurs appartiennent à un *alphabet*  $\Sigma$  fini. Un *domino* de deux tuiles de Wang  $t_1$  et  $t_2$  adjacentes est valide si les couleurs de l'arête commune des deux tuiles sont les mêmes. Formellement, un domino horizontal  $t_1 t_2$  est valide si  $t_{1,E} = t_{2,O}$  et un domino vertical  $\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}$  est valide si  $t_{1,S} = t_{2,N}$ .

**Définition 2.1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet fini. Un *coloriage* du plan est une application  $c: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Sigma$ .

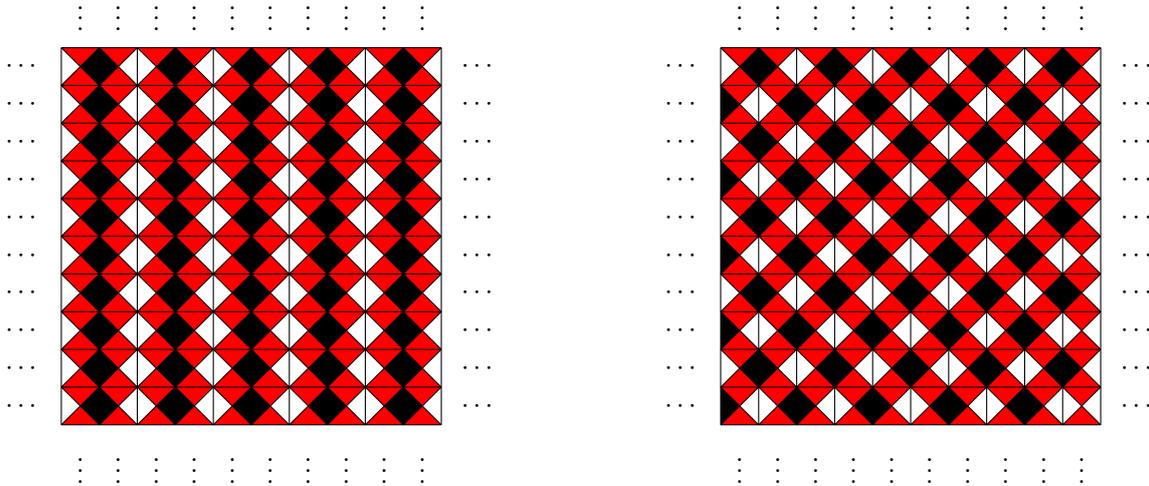
Si  $\Sigma$  est un jeu de tuiles, noté  $\tau$ , on dit que le coloriage  $c$  est un *pavage* du plan si toutes les tuiles sont compatibles entre elles, c'est-à-dire que  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, c(x, y)_E = c(x + 1, y)_O$  et  $c(x, y)_N = c(x, y + 1)_S$ .

Un *jeu de tuiles* est un ensemble fini de tuiles de Wang. Pour paver le plan, muni d'un jeu de tuiles, on place des copies de ces tuiles arête contre arête, sans les faire pivoter, pour recouvrir le plan de sorte que l'on n'ait que des dominos valides.

**Exemple 2.2.** On considère le jeu de tuiles suivant, qui comporte 2 tuiles :



Ce jeu de tuiles fournit des pavages valides du plan. On commence par faire une ligne en alternant la première et la seconde tuile (c'est la seule façon d'agencer horizontalement ces tuiles). On copie ensuite cette ligne au dessus et en dessous de la première, en choisissant à chaque fois si on l'aligne avec la précédente, ou bien si on alterne les tuiles. Voici deux exemples de pavages possibles, sur la quantité non dénombrable de possibilités :



Il n'existe pas d'algorithme pour décider si, pour un jeu de tuiles donné, il est possible de paver le plan : ce problème, le *problème du pavage*, est indécidable [1].

On définit aussi la *translation* du coloriage  $x$  de vecteur  $u \in \mathbb{Z}^2$  par  $\forall y \in \mathbb{Z}^2, \sigma_u x(y) = x(y + u)$ .

**Définition 2.3.** Un pavage  $c$  est *périodique* de période  $p \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  si  $\forall z \in \mathbb{Z}^2, c(p + z) = c(z)$ . On dit que le pavage est *apériodique* s'il n'admet aucune période.

On dit par ailleurs qu'un pavage est *bipériodique* s'il possède deux périodes non colinéaires.

**Lemme 2.4.** *Tout jeu de tuiles  $\tau$  qui admet un pavage périodique admet un pavage bipériodique.*

*Preuve.* Soit  $c$  un pavage par tuiles de  $\tau$  de période  $(p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$ . Quitte à appliquer des symétries, on peut supposer que  $p_x \geq 0$  et  $p_y > 0$ . Considérons la bande  $c|_{\mathbb{Z} \times \llbracket 0, p_y - 1 \rrbracket}$  une bande horizontale de hauteur  $p_y$ . Par périodicité du pavage, les tuiles présentes sur la bordure supérieure de la bande sont les mêmes que celles sur la bordure inférieure, à un décalage de  $p_x$  près. Par ailleurs, le nombre de tuiles du jeu de tuiles est fini, il n'existe donc qu'un nombre fini de blocs de taille  $p_x \times p_y$  dans la bande considérée. Il existe donc  $a, b \in \mathbb{Z}$ , avec  $a < b$  tels que les blocs de taille  $p_x \times p_y$  en positions  $(a, 0)$  et  $(b, 0)$  soient les mêmes. Le motif  $c|_{[a, b-1] \times [0, p_y-1]}$  peut

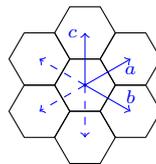
donc être répété horizontalement et former une bande périodique, de période  $b - a$ . Encore une fois, les tuiles présentes sur les bordures supérieures et inférieures sont identiques, à un décalage de  $p_x$  près. On peut donc répéter horizontalement la bande  $c|_{[a,b-1] \times [0,p_y-1]}$  en appliquant à chaque fois un décalage de  $a$  pour que les tuiles aillent ensemble. On a ainsi formé un nouveau pavage bipériodique : ses périodes sont  $(p_x, p_y)$  et  $(b - a, 0)$ , qui sont bien linéairement indépendantes car  $p_y > 0$ . ■

L'autre implication de ce théorème est immédiate. Ainsi, pour un jeu de tuiles  $\tau$  donné, il n'y a que deux possibilités : soit il est périodique (et donc bipériodique), soit il n'admet aucun pavage périodique. On dit alors que  $\tau$  est *apériodique* si l'ensemble des tous les pavages par des tuiles de  $\tau$ , que l'on notera  $P_\tau$  ne contient que des pavages apériodiques. Par exemple, le jeu de tuiles de l'exemple 2.2 est périodique, puisqu'on peut construire au moins un pavage périodique (voir sur les figures dans l'exemple).

La preuve de Berger en 1964 [1] pour montrer l'indécidabilité du problème de pavage passe par une construction d'un jeu de tuiles apériodique. C'est dans cet esprit que dans les années qui ont suivies, de nouveaux jeu de tuiles ont été proposés, notamment par Robinson [2] en 1971, qui donne une construction élégante qui sera largement réutilisée dans la suite. Ainsi, d'autres jeu de tuiles, aux cardinaux plus réduits ont été construits : Ollinger [3] a construit un jeu de 104 tuiles. Récemment, Jeandel et Rao [4] ont construit un jeu de tuiles apériodique de 11 tuiles de Wang de 4 couleurs et ont démontré qu'il n'existe pas de tels jeux de tuiles apériodiques composé de 10 tuiles ou moins.

## 2.2 Pavage hexagonal

La grille carrée n'est pas la seule manière de paver la plan par un polynôme régulier par translation. Nous considérons ici le pavage de la grille hexagonale en remplaçant la grille  $\mathbb{Z}^2$  de la section précédente par le groupe  $H$  défini par  $H = \langle a, b, c \mid a + b = b + a, c = a - b \rangle$ . Ce groupe est engendré par les trois élément comme ci dessous :

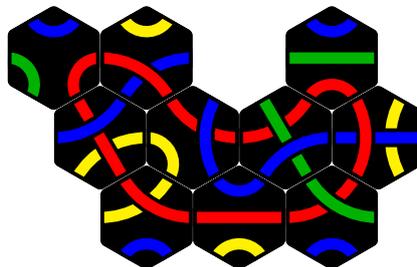


Ainsi, toute tuile du plan peut être atteinte en suivant un chemin de  $\pm a, \pm b$  et  $\pm c$ . Pour une tuile hexagonale  $t$  donnée, ses couleurs sont appelées respectivement, en commençant par l'arête supérieure et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre,  $t_n, t_{ne}, t_{se}, t_s, t_{so}$  et  $t_{no}$ .

**Définition 2.5.** Un *coloriage* est cette fois-ci une application  $c: H \rightarrow \Sigma$  (où  $\Sigma$  est un alphabet fini).

De la même manière, un coloriage  $t$  *pave* le plan si  $\forall x \in H, t(x)_n = t(x + c)_s, t(x)_{ne} = t(x + a)_{so}$  et  $t(x)_{se} = t(x + b)_{no}$ .

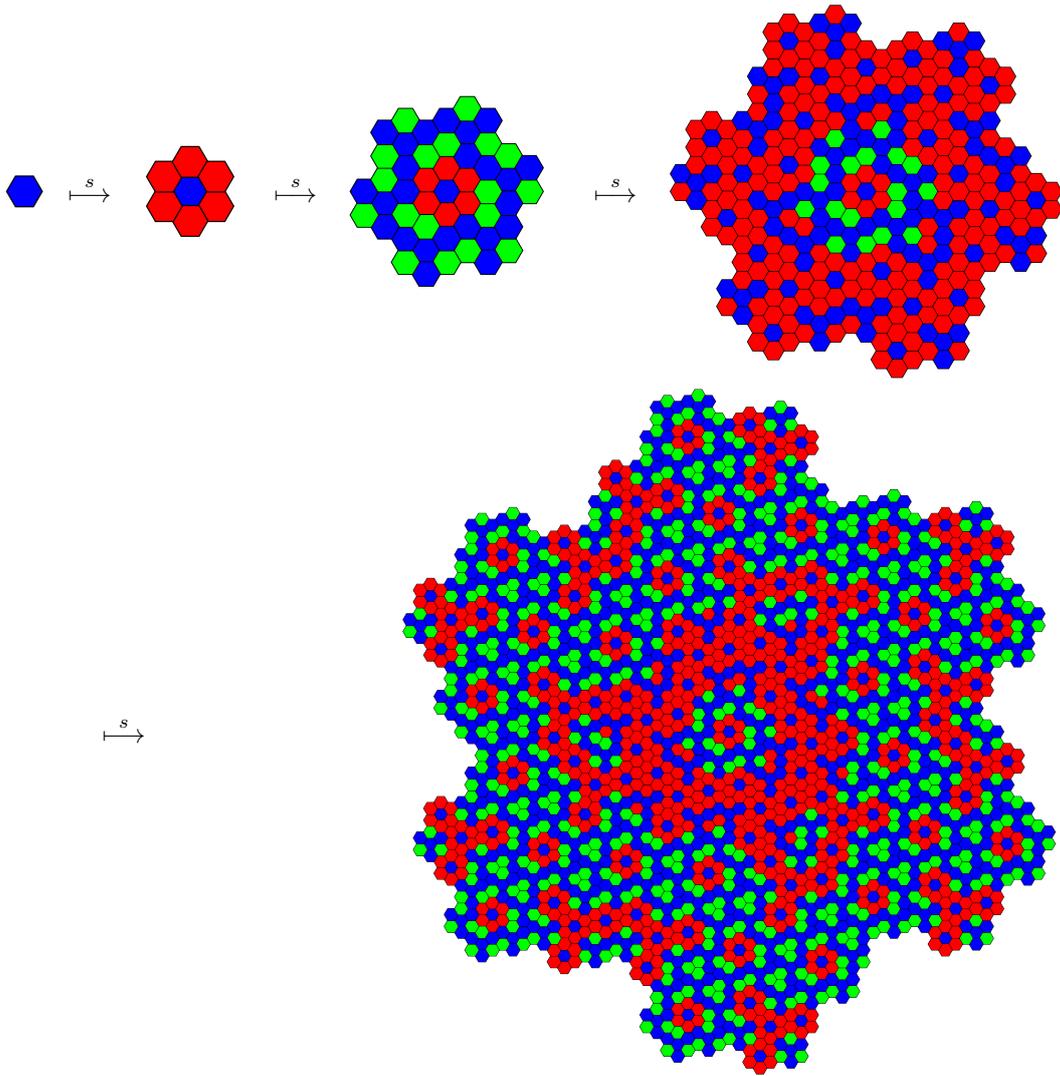
**Exemple 2.6.** Le Tantrix est un jeu de société dont le but est de former la ligne la plus longue à partir de tuiles hexagonales traversées par des fils de couleurs verts, bleus, jaunes ou rouge. Voici un exemple de configuration de jeu (ici, pour l'instant, c'est le rouge qui gagne) :



On définit aussi la *translation* du coloriage  $x$  de vecteur  $u \in H$  par  $\forall y \in H, \sigma_u x(y) = x(y + u)$ .

**Définition 2.7.** Un pavage  $c: H \rightarrow \tau$  est *apériodique* si  $\forall h \in H \setminus \{0\}, \exists x \in H, c(x + h) \neq c(x)$ .





Soit  $s: \tau \rightarrow \tau^H$  une substitution sur un jeu de tuiles  $\tau$ . On dit que la substitution  $s$  est *compatible* avec  $\tau$  si  $\forall t \in \tau \forall k \geq 1, s^k(t)$  est un motif valide, c'est-à-dire si sont tous les dominos le sont.

Les définitions et résultats qui suivent ne dépendent pas du fait que l'on soit dans le cas carré ou hexagonal. Les notations prises ci-dessous sont celles des tuiles hexagonales, mais tiennent toujours pour les carrés (il suffit de remplacer  $H$  par  $\mathbb{Z}^2$  et  $\text{⊗}$  par  $\text{⊠}$ ). On prend  $\Sigma$  un alphabet fini quelconque.

On munit  $H$  de la topologie discrète et  $\Sigma^H$  du produit de ces topologies. On va ici poser quelques définitions et résultats de la théorie de la dynamique symbolique.

**Théorème 3.5** (Théorème de Tychonov).  $\Sigma^H$  est compact pour cette topologie.

**Définition 3.6.** Un *sous-shift*  $\mathbf{T}$  est un sous-ensemble fermé pour la topologie produit de  $\Sigma^H$  et invariant par translation.

**Exemple 3.7.** Soit  $\tau$  un jeu de tuile. Montrons que l'ensemble des pavages (ou configurations) valides  $P_\tau$  est un sous-shift. Soit  $(\mathcal{T}_n)_n$  une suite de pavages valides qui converge vers un coloriage limite  $\mathcal{T}$ . Tout motif de  $\mathcal{T}$  apparaît à partir d'un certain rang dans la suite  $(\mathcal{T}_n)$ , par convergence simple. Ainsi,  $\mathcal{T}$  ne contient aucune erreur de pavage, c'est donc un pavage valide. Par caractérisation séquentielle des fermés,  $P_\tau$  est fermé. La stabilité par translation est immédiate, car toute translation d'un pavage valide est encore un pavage valide. Ainsi,  $P_\tau$  est un sous-shift.

Un sous-shift  $\mathbf{T}$  est dit *minimal* s'il ne contient pas de sous-shift non vide strictement inclus dans  $\mathbf{T}$ .

**Définition 3.8.** Soit  $\mathcal{G}$  un sous-ensemble fini quelconque de  $H$ . Un *motif*  $p$  est un élément de  $\Sigma^{\mathcal{G}}$ .

On dit que le motif  $p$  apparaît dans la configuration  $x$ , et on note  $p \sqsubset x$  s'il existe une restriction de  $x$  à une macro<sup>k</sup>-tuile (pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ ) où  $x$  et  $p$  coïncident, à translation près.

Soit  $x \in \Sigma^H$  une configuration. On définit le *langage*  $\mathcal{L}(x)$  comme étant l'ensemble des motifs élémentaires  $p$  comme décrit ci-dessus tels que  $p \sqsubset x$ .

**Proposition 3.9** ([6]). *Soit  $\mathbf{T}$  un sous-shift. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathbf{T}$  est minimal.
2.  $\forall x, y \in \mathbf{T}, \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$ .

*Preuve.* Pour  $x \in \Sigma^H$ , on définit l'orbite de  $x$  par  $\mathcal{O}(x) = \{\sigma_a^{i_1} \sigma_b^{i_2} \sigma_c^{i_3} x \mid i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{Z}\}$  (dans le cas des tuiles carrées,  $\mathcal{O}(x) = \{\sigma_{(i_1, i_2)}(x) \mid (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ ). Le fermé  $\overline{\mathcal{O}(x)}$  est invariant par translation. On introduit une condition 1.bis :

1.bis  $\forall x \in \mathbf{T}, \mathcal{O}(x)$  est dense dans  $\mathbf{T}$ .

Montrons d'abord que 1.  $\Leftrightarrow$  1.bis. Supposons que  $\mathbf{T}$  est minimal. Pour tout  $x \in \mathbf{T}, \overline{\mathcal{O}(x)} \subset \mathbf{T}$  est un sous-shift de  $\mathbf{T}$ , donc par minimalité,  $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathbf{T}$ . Inversement, si  $\mathbf{T}$  n'est pas minimal, alors il existe un sous-shift  $\mathbf{U} \subsetneq \mathbf{T}$ . Alors,  $\forall x \in \mathbf{U}, \mathcal{O}(x) \subset \mathbf{U}$  qui est fermé et strictement inclus dans  $\mathbf{T}$ ,  $\mathcal{O}(x)$  ne peut pas être dense dans  $\mathbf{T}$ .

Par définition du langage et des orbites, on a  $\overline{\mathcal{O}(x)} = \overline{\mathcal{O}(y)}$  ssi  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$ . On a donc 1.bis  $\Leftrightarrow$  2. ■

**Définition 3.10.** L'ensemble engendré d'une substitution  $s$  est l'ensemble  $\Omega_s$  des coloriages dont tout motif fini apparaît dans une itération de  $s$ . De manière formelle, on a :

$$\Omega_s = \{c \in \Sigma^H \mid \forall m \sqsubset c, \exists a \in \tau, \exists k \in \mathbb{N}, m \sqsubset s^k(a)\}$$

**Définition 3.11.** L'ensemble limite d'une substitution  $s$  est l'ensemble  $\Lambda_s$  défini par :

$$\Lambda_s = \bigcap_{k \geq 0} \overline{s^k(\Sigma^H)^\sigma}$$

où  $\overline{X}^\sigma$  désigne la fermeture par translation de l'ensemble  $X$  (ainsi,  $\overline{X}^\sigma$  est un sous-shift). On peut montrer (voir la proposition 1 de [3]) que  $\Lambda_s$  est exactement l'ensemble des coloriages qui admettent une infinité de pré-images successives par la substitution.

On définit  $\mathcal{F}(I) = \{c \in \Sigma^H \mid \forall p \in I, p \not\sqsubset c\}$ , l'ensemble de tous les coloriages ne contenant aucun motif interdit.

**Définition 3.12.** Soit  $\mathbf{T} \subset \Sigma^H$  un sous-shift. On dit que  $\mathbf{T}$  est un *sous-shift de type fini* (abrégé en *SFT*) s'il existe un ensemble fini  $I$  de motifs interdits tel que  $\mathbf{T} = \mathcal{F}(I)$ .

**Exemple 3.13.** Tout ensemble de pavage par un jeu de tuile de Wang est un SFT. En effet, il suffit d'interdire tous les motifs composés de deux tuiles qui ne coïncident pas selon un bord.

On ne peut pas toujours donner un nombre fini de contraintes pour décrire un coloriage quelconque d'un jeu de tuile. Mais il est parfois possible d'enrichir l'alphabet pour y faire apparaître des traits de construction pour reconnaître la structure de tels coloriages, puis de décrire par des contraintes locales les coloriages enrichis et enfin d'engendrer l'ensemble des coloriages « simples » par projection. Cela correspond à la notion de soficité.

**Définition 3.14.** Un sous-shift  $\mathbf{T}$  de  $\Sigma^H$  est *sofique* s'il existe un alphabet  $\Gamma$ , un SFT  $\mathbf{U}$  de  $\Gamma^H$  et une projection alphabétique  $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$  tels que  $\pi(\mathbf{U}) = \mathbf{T}$ .

**Définition 3.15.** Une substitution  $s$  est *non ambiguë* si tout coloriage  $c$  de l'ensemble limite  $\Lambda_s$  admet un unique antécédent : il existe un unique coloriage  $c'$  et un unique vecteur de translation  $z \in \mathfrak{S}$  tel que  $\sigma_z s(c') = c$ .

**Proposition 3.16** ([3]). *L'ensemble limite d'une substitution  $s$  non ambiguë est aperiodique (il ne contient pas de coloriage périodique).*

*Preuve.* Par l'absurde, supposons que  $\Lambda_s$  contient des coloriages périodiques. Soit  $p \in H$  la plus petite période d'un tel coloriage et soit  $c \in \Lambda_s$  un coloriage périodique de période  $p$ . Soit  $z \in \mathfrak{S}$ , et soit  $c' \in \Lambda_s$  tel que  $\sigma_z s(c') = c$ , un tel coloriage existe car  $c \in \Lambda_s$ . Le coloriage  $c$  est périodique de période  $p$ , donc  $\sigma_{p+z} s(c') = c$ . Par non ambiguïté de la substitution, comme la pré-image d'un pavage valide est un pavage valide,  $p$  est de la forme  $kp'$  où  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $p' \in \{2c+a, 2a+b, 2b-c\}$  (sur une grille carrée  $3 \times 3$  on a juste  $p = 3p'$ ). Ainsi  $\sigma_{p+u} s(c') = \sigma_u s(\sigma_{p'} c')$ , et alors  $c' = \sigma_{p'} c'$ . On a alors trouvé un coloriage périodique  $c'$  de l'ensemble limite de  $s$  de période strictement plus petite que la période minimale, ce qui est une contradiction. ■

**Proposition 3.17** ([7]). *Si une substitution  $s$  est injective et que l'une de ses sept/neuf projections associées,  $s_i : \Sigma \rightarrow \Sigma^{\mathfrak{S}/\boxplus}$ ,  $a \mapsto s(a)(i)$  pour  $i \in \mathfrak{S}/\boxplus$ , est d'image disjointe de celles des six/huit autres, alors  $s$  est non ambiguë.*

*Preuve.* Soit  $c \in \Lambda_s$ . Alors  $c$  peut être découpé en macro-tuiles de 7 hexagones, car  $c$  possède une pré-image par  $s$ . Les projections ont des images disjointes, ainsi les translations de vecteur  $kp$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \{2c+a, 2a+b, 2b-c\}$  préservent ces groupes de 7 hexagones. Ainsi, la pré-image de  $c$  par la substitution est unique, à translation d'un  $z \in \mathfrak{S}$ . près. ■

**Définition 3.18.** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. On dit que  $\tau$  est *auto-simulant* s'il existe une application  $s: \tau \rightarrow \tau^{\otimes 3}$  (qui sera une substitution) tel que l'ensemble  $P_\tau$  des pavages avec des tuiles de  $\tau$  vérifie la propriété :

$$P_\tau = \left\{ \sigma_z \circ s(c) \mid c \in P_\tau, z \in \otimes^3 \right\}$$

**Proposition 3.19.** Si  $\tau$  est un jeu de tuiles auto-simulant et  $s$  est une substitution sur  $\tau$ , on a la suite d'inclusion suivante :

$$\Omega_s \subset P_\tau \subset \Lambda_s$$

*Preuve.* Soit  $c$  un coloriage de  $\Omega_s$ . Montrons que  $c$  est un pavage valide du plan. Considérons deux tuiles adjacentes selon une arête. Alors elles sont dans la même macro<sup>k</sup>-tuile, pour un  $k$  assez grand. Par définition de  $\Omega_s$ , ces tuiles sont dans  $s^k(a)$ , pour un certain  $a \in \tau$ . Elle sont donc compatibles. Le coloriage  $c$  pave donc le plan.

Soit  $\mathcal{T}$  un pavage du plan par  $\tau$ . Le jeu de tuile étant auto-simulant, on peut désubstituer  $\mathcal{T}$  en un pavage valide par  $\tau$  à translation près, et cela une infinité de fois. Donc  $\mathcal{T} \in \Lambda_s$ . ■

En particulier,  $\Omega_s$  et  $\Lambda_s$  sont des sous-shifts. Ainsi, d'après la proposition précédente, si  $P_\tau$  est minimal, alors  $\Omega_s = P_\tau$ .

Le théorème suivant va nous permettre de construire un jeu de tuile a périodique.

**Théorème 3.20** ([3]). *Tout jeu de tuiles auto-simulant  $\tau$  dont la substitution associée est non ambiguë, et admettant un pavage est a périodique.*

*Preuve.* On note  $s$  la substitution associée. Par hypothèse, et d'après la proposition précédente 3.19, on a  $\emptyset \subsetneq P_\tau \subset \Lambda_s$ . Par ailleurs, d'après la proposition 3.16,  $\Lambda_s$  est a périodique. Ainsi, le jeu de tuile  $\tau$  est a périodique. ■

Dans le paragraphe à venir, on va construire un tel jeu de tuile.

### 3.2 Substitution 3×3

On commence par se donner 9 couleurs. Ici, ces couleurs sont  $\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet$ ; que l'on note respectivement  $a, b, \dots, i$ . On arrange ensuite ces couleurs les unes par rapport aux autres : les couleurs foncées sont à l'ouest des couleurs « simples », qui sont elles même à l'ouest des couleurs claires (puis on boucle sur les couleurs foncées). De la même manière, les teintes de bleu sont au nord des rouges et les vertes sont au nord des bleues. On note, malgré un conflit de notations,  $n, s, o$  et  $e$  les quatre applications de  $\{a, \dots, i\}$  dans lui-même qui renvoient respectivement la couleur au nord, au sud, à l'ouest ou à l'est. On part de neuf tuiles de bases (voir figure 1(a)) qui forment un pavage périodique du plan. Pour simplifier, on appelle couleur d'une tuile la couleur présente sur l'arête de gauche et du bas de la tuile (par exemple, la couleur de la tuile  $\blacksquare$  est rouge, ou  $b$ ). On note aussi  $\blacksquare$  l'emplacement de la tuile SO dans la macro-tuile (et de même pour les huit autres). On cherche à définir un jeu de tuiles  $\tau$  et une substitution  $s: \tau \rightarrow \blacksquare$  qui soit non-ambiguë et qui rende le jeu de tuiles auto-simulant.

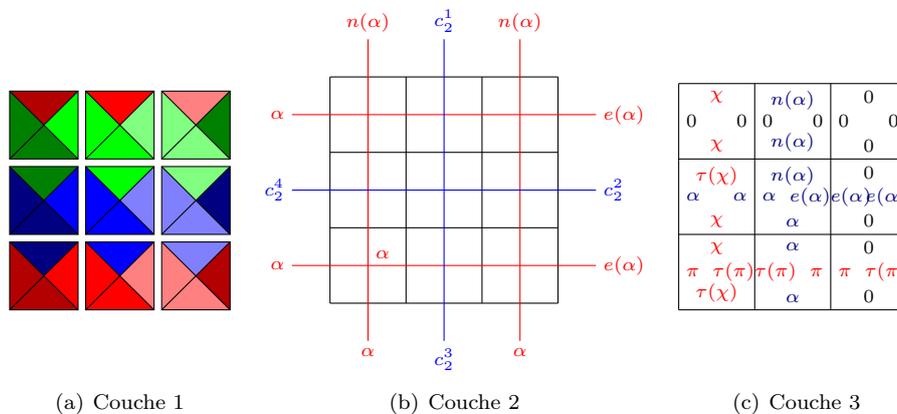


FIGURE 1 – Les trois couches d'informations

La première étape de la substitution est d'envoyer une tuile sur une macro-tuile 3 × 3 constituée des 9 tuiles de base, collées comme il faut. Cela ne suffit pas à donner une substitution qui vérifie les hypothèses du théorème 3.20 : la substitution n'est pas injective. Il faut donc ajouter une nouvelle couche d'information.

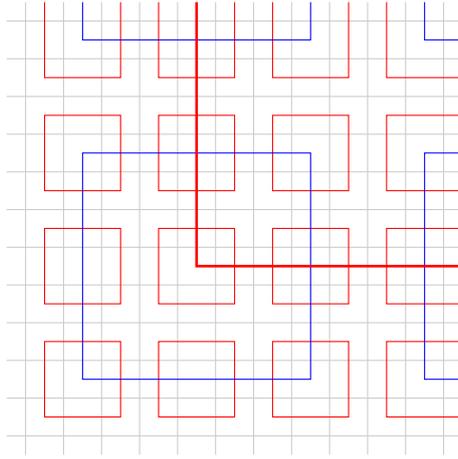
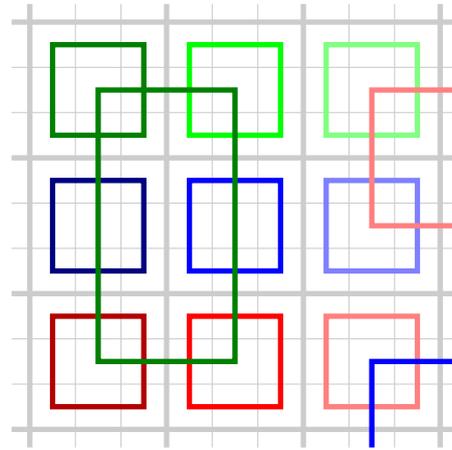
FIGURE 2 – En rouge les intérieurs des macro-tuiles, en bleu les macro<sup>2</sup>-tuiles et en rouge épais les macro<sup>3</sup>-tuiles

FIGURE 3 – Exemple de pavage sans pré-image (seules certaines informations de la couche 2 ont été représentées)

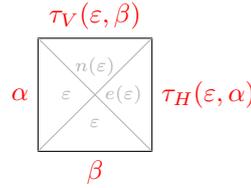
On ajoute une deuxième couche de couleur sur chaque arête des tuiles. Cette couleur va permettre de faire circuler dans la macro-tuile l'information de sa position dans la macro<sup>2</sup>-tuile. Pour une tuile de couleur  $\alpha$ , on va représenter cette information par un fil de couleur  $\alpha$  qui circule autour de la tuile centrale, c'est à dire qui traverse les tuiles  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ . Cette information sera transmise aux autres macro-tuiles via des fils passant dans les quatre coins ( $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ). On a représenté cela en figure 1(b) : les fils rouges représente cette information  $\alpha$  à faire passer et les fils bleus représentent les informations qui passent dans les macro-tuiles de taille supérieure. On a représenté en figure 2 ces informations à différents niveaux (sans les fils reliant les macro-tuiles).

Avec ces seules informations, on ne pourra pas désubstituer de façon unique pour prouver que le jeu de tuiles est auto-codant. En effet, il existe des pavages avec des carrés  $3 \times 3$  qui ne sont pas dans l'image de  $s$ , un exemple est donné en figure 3. Il faut donc ajouter une troisième couche d'information pour ajouter des contraintes supplémentaires sur les tuiles.

Après différents essais infructueux (et une aide extérieure), on construit la troisième couche ainsi : Sur les arêtes sud et ouest de la tuile  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ , on fait passer l'information de la couleur  $\varepsilon$  qui fait le tour de la macro-tuile dans la couche 2, et au nord (resp. est) on fait passer la couleur  $n(\varepsilon)$  (resp  $e(\varepsilon)$ ). On transmet ensuite cette information aux macro-tuiles voisines en mettant cette information sur les arêtes extérieures de  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$  (en transmettant  $e(\varepsilon)$ ) et  $\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$  (en transmettant  $n(\varepsilon)$ ). Pour ensuite pouvoir désubstituer de manière unique, on va ajouter une nouvelle couleur, que l'on va noter 0 (on prend cette couleur noire :  $\bullet$ ) et qui va passer horizontalement sur la ligne de haut ( $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}$ ) ainsi que verticalement celle de droite ( $\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}$ ). Sur les deux lignes restantes (celles de gauche et du bas) on va transmettre les couleurs de la tuile de départ, mais avec une contrainte supplémentaire : ces couleurs correspondent entre elles verticalement et horizontalement. Pour formaliser cette condition, on définit deux bijections  $\tau_H^0$  et  $\tau_V^0$  de l'ensemble des 10 couleurs ( $\{0, a, \dots, i\}$ ) ainsi :

$c$	0	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\tau_H^0(c)$	0	$c$	$b$	$a$	$f$	$e$	$d$	$i$	$h$	$g$
$\tau_V^0(c)$	0	$g$	$h$	$i$	$d$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$

Les tuiles auront alors une couche 3 (en rouge ci dessous) définie ainsi, en fonction de leur couleur  $\varepsilon$  de la couche 1 :



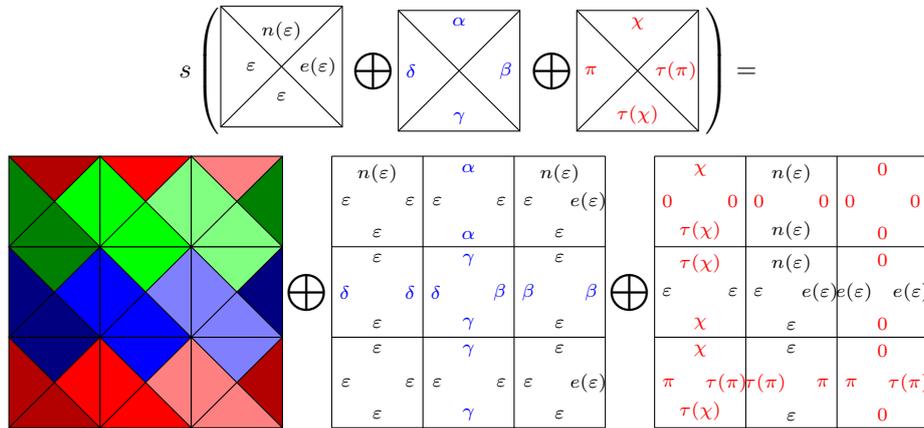
Où les deux application  $\tau_H$  et  $\tau_V$  sont définies ainsi :

- $\tau_H(a, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(a, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(b, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(b, \alpha) = \alpha$
- $\tau_H(c, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(c, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(d, \alpha) = \alpha$  et  $\tau_V(d, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(e, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(e, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(f, \alpha) = \alpha$  et  $\tau_V(f, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(g, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(g, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$
- $\tau_H(h, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(h, \alpha) = \alpha$
- $\tau_H(i, \alpha) = \tau_H^0(\alpha)$  et  $\tau_V(i, \alpha) = \tau_V^0(\alpha)$

On a représenté en figure 1(c) la troisième couche des neuf tuiles d'une macro-tuile.

Les contraintes données par la couche 3 forcent certaines tuiles à avoir une couche 3 plus ou moins forcée (voir dans la liste récapitulative ci-dessous) et réduit le nombre de tuiles possibles. On remarquera que pour les tuiles ayant  $i$  comme couleur de couche 1 (par exemple) la couche trois ne comporte que des 0, la définition de  $\tau(i, \_)$  n'est donc pas très importante, il suffit que 0 soit envoyé sur 0.

Voici une récapitulation de la substitution  $s$ , couche par couche (avec quelques simplifications de notations<sup>1</sup>) :



**Théorème 3.21.** *Le jeu de tuiles  $\tau$  est aperiodique.*

**Preuve.** La substitution fournit un pavage valide, car c'est comme ça que l'on a construit le jeu de tuiles. Cela est en effet évident pour les arêtes intérieures des macro-tuiles. Pour les arêtes externes, les motifs arbitrairement grands engendrés par la substitution sont valides. Donc par compacité de  $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ , la substitution fournit un pavage valide.

La substitution est non ambiguë, d'après la proposition 3.17, car elle est injective et les neuf projections ont des images disjointes, grâce à la couche 1.

Montrons que  $\tau$  est auto-codant. Soit  $\mathcal{T}$  un pavage avec ce jeu de tuiles. Montrons que  $\mathcal{T}$  est l'image d'un pavage (valide) par  $s$ , c'est-à-dire que l'on peut désubstituer  $\mathcal{T}$  de manière unique. Grâce à la couche 1 des tuiles qui n'admet que 9 pavages, il existe un  $u \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\forall v \in \mathbb{Z}^2, \sigma_u \mathcal{T}(v)$  a  $v$  comme couche 1. Cela signifie que l'on peut recentrer  $\mathcal{T}$  de sorte  $\sigma_u \mathcal{T}$  est de la forme dans la figure 4(a). Alors  $\sigma_u \mathcal{T}$  est l'image par  $s$  d'une tuile qui est la superposition de trois couches (voir figure 4(b)). Cette désubstitution est unique car grâce aux bijections  $\tau_H(\_, \varepsilon)$  et  $\tau_V(\_, \varepsilon)$ , seules ces valeurs peuvent être présentes sur la couche 3 des tuiles.

Ainsi, chaque macro-tuile est l'image unique d'une tuile par la substitution et la pré-image de  $\mathcal{T}$  par  $s$  est encore un pavage valide du plan. Donc le jeu de tuiles est auto-codant.

Ainsi, d'après le théorème 3.20,  $\tau$  est aperiodique. ■

Regardons maintenant le nombre de tuiles dans le jeu. On va les compter en effectuant une disjonction de cas, selon la valeur de la couche 1. La couche 1 impose des contraintes sur les couches 2 et 3. Dans le tableau suivant, on a regroupé ces différentes possibilités. Sur la couche 2, on a  $\alpha, \beta \in \{a, \dots, i\}$  (donc 9 valeurs possibles chacun) et sur la couche 3, on a  $\alpha, \beta \in \{0, a, \dots, i\}$  et  $\gamma \in \{a, \dots, i\}$  (10 valeurs possibles pour  $\alpha, \beta$  et 9 pour  $\gamma$ ).

1. On écrit juste sur le schéma  $\tau(\chi)$  au lieu de  $\tau_V(\varepsilon, \chi)$

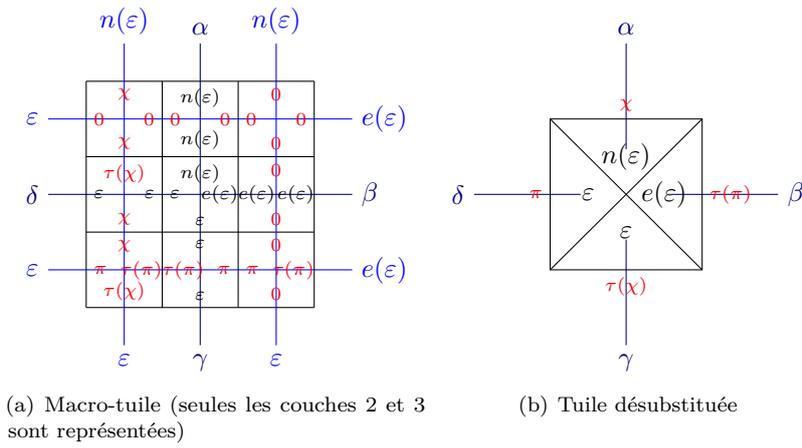


FIGURE 4 – Désubstitution (les bleus correspondent à la couche 2 et le rouge à la couche 3)

Couche 1	Couche 2	Couche 3	Nombre
			900
			7 290
			90
			7 290
			729

Couche 1	Couche 2	Couche 3	Nombre
			81
			729
			9
	Correspond à la couche 2 d'une des 8 autres types de tuiles		3 240

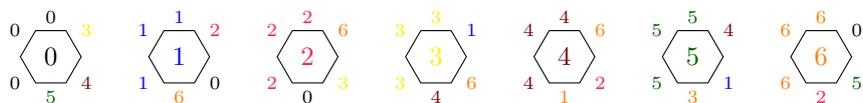
Concernant les tuiles , comme la tuile centrale d'une macro-tuile contient le fil de l'information de la macro<sup>k</sup>-tuile d'un rang supérieur, les possibilités correspondent aux couches 2 des 8 autres type de tuiles, suivant l'emplacement de la macro-tuile dans la macro<sup>k</sup>-tuile.

Au total, on a 20 358 tuiles dans le jeu de tuiles  $\tau$ .

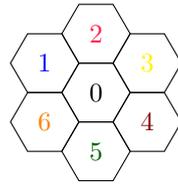
### 3.3 Les hexagones : première tentative

On cherche ici à effectuer un travail similaire à ce qu'on a fait précédemment avec cette fois-ci des tuiles de forme hexagonale. On va passer relativement vite dessus car on verra que cette méthode ne se transpose pas. Je l'ai quand même intégrée dans ce rapport car cette méthode est intéressante et comporte quelques similarités avec celle développée dans la section suivante.

On commence par se donner 7 couleurs  $(0, \dots, 6)$  et on définit ainsi les 7 tuiles de base :



Ces sept tuiles se rassemblent pour former une macro-tuile :



On effectue le même type de décorations que sur les carrés : suivant la couleur de la macro-tuile dans la macro<sup>2</sup>-tuile, on fait passer un fil portant cette couleur, et ainsi de suite pour des rangs supérieurs. Des fils partent ensuite vers les autres macro-tuiles de même niveau pour transmettre l'information (voir figure 5).

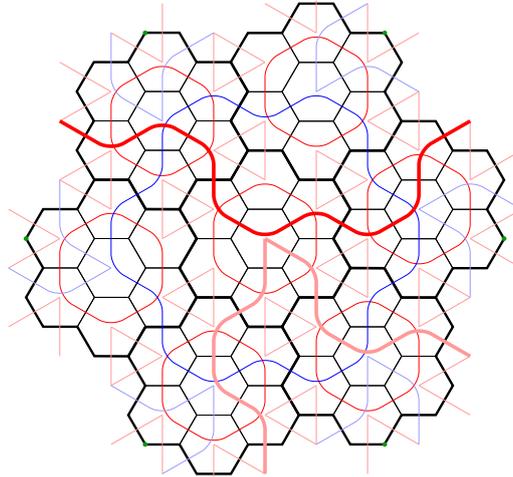


FIGURE 5 – Les traits pâles représentent les fils qui relient les macro-tuiles entre elles

De la même manière que pour les substitution  $3 \times 3$  sur les carrés, il faut ajouter une troisième couche d'information pour permettre de pouvoir désubstituer de manière unique.

Le problème est que sur la couche 3, les trois fils qui portent les informations ne se rencontrent pas, et il n'est pas possible de faire en sorte que ces trois fils rencontrent les deux autres dans la macro-tuile (voir figure 6), car les 6 faces de chaque hexagones sont déjà traversées par des fils de la couche 3. Il n'est donc pas possible de désubstituer de manière unique avec cette construction.

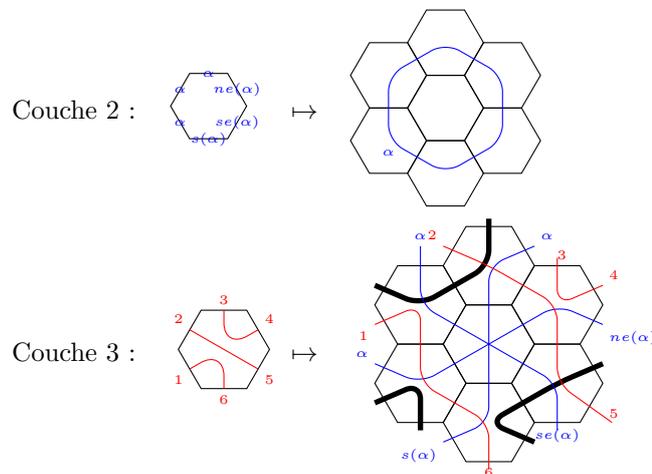


FIGURE 6 – Le trait noir épais correspond à la couleur 0

## 4 Construction d'un jeu de tuiles hexagonal en utilisant une substitution combinatoire

On part ici d'hexagones « blancs » qui pavent le plan. On va appliquer la construction de Thomas Fernique et Nicolas Ollinger [8] pour décorer ces tuiles et ainsi construire un jeu de tuiles  $\tau$  apériodique.

Dans ce paragraphe, on appelle *facette* les bord des tuiles, *macro-facettes* les bords des macro-tuiles... Pour toute notion  $n$  se rapportant à une tuile, on dira macro- $n$  pour la notion correspondante dans la macro-tuile.

### 4.1 Définition de la substitution

**Définition 4.1.** Une *substitution combinatoire* est un ensemble fini de règles  $(P_i, Q_i, \gamma_i)$ , où  $P_i$  est une tuile,  $Q_i$  est un ensemble fini de tuiles adjacentes, et  $\gamma_i: \partial P_i \rightarrow \partial Q_i$  est une application qui envoie des facettes distinctes sur des ensembles de facettes disjoints.

Ici, on a qu'une seule tuile  $P$  de départ, un hexagone régulier dont les côtés sont  $n$  (en haut),  $ne$ ,  $se$ ,  $s$ ,  $so$ ,  $no$  (voir figure 7(a)). On numérote ces côtés de 1 à 6 en commençant par  $n$ , puis dans le sens des aiguilles d'une montre. Par exemple, si on parle de la 3-ème macro-facette de  $Q$ , on désigne les 3 facettes sur la macro-facette  $se$  de la macro-tuile.

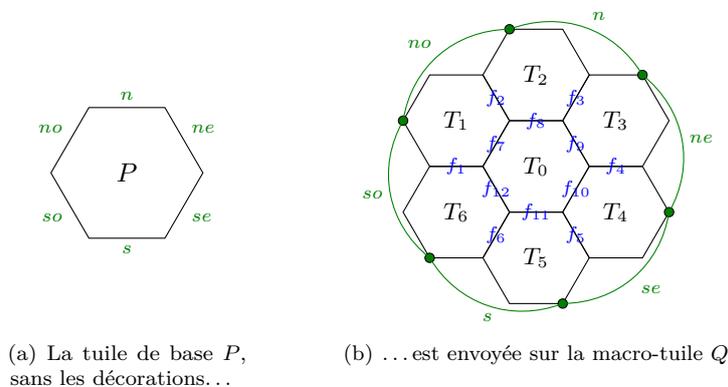


FIGURE 7 – Définition de la substitution  $\sigma$

**Définition 4.2.** Une substitution combinatoire  $\sigma$  est une *bonne substitution* si elle vérifie les conditions suivantes :

- elle est *consistante*, c'est-à-dire que tout pavage par macro-tuile admet une pré-image par  $\sigma$
- elle est *connectante*, c'est-à-dire que pour chaque règle  $(P, Q, \gamma)$ , le *graphe dual* de  $Q$  (le graphe dont les sommets sont les centres des tuiles de  $Q$  et les arêtes relient les tuiles adjacentes) a un sous-graphe  $N$ , appelé *réseau* tel que :
  1.  $N$  est étoilé, avec une branche pour chaque macro-facette, et la feuille de la  $k$ -ème branche est une tuile de la  $k$ -ième macro-facette de  $Q$ , appelée le  $k$ -ème *port*.
  2. Chaque macro-facette a des facettes qui ne sont pas des ports, et en enlevant les arêtes de  $N$  et son sommet central, on obtient un graphe qui connecte toutes ces facettes non port.
  3. Le centre de  $N$  correspond à une tuile de l'intérieur de  $Q$ , appelée *tuile centrale*.
  4. Si deux macro-tuiles sont compatibles selon un port, alors elles sont aussi compatibles selon la macro-facette correspondante.

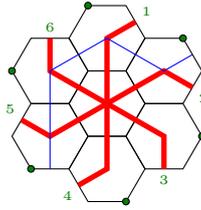
Soit  $\sigma$  la substitution triviale qui envoie un hexagone sur un groupe de 7 hexagones, une macro-tuile  $Q$  (voir figure 7(b)). On remarque que les facettes de  $P$ , une fois envoyées sur les macro-facettes de  $Q$  vont avoir tendance à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.

**Proposition 4.3.** Cette substitution  $\sigma$  est une bonne substitution combinatoire.

*Preuve.* La consistance est immédiate, puisque la seule tuile de jeu de base est un hexagone, tout pavage par des macro-tuiles admet donc trivialement une pré-image par  $\sigma$ . Montrons qu'elle est connectante. On a ici une seule règle pour la substitution. Soit le réseau  $N$  défini ainsi : le centre de ce réseau est le centre de la tuile centrale, et dans chacune des 6 directions, le réseau ressort de la macro-tuile par la facette dont les extrémités ne sont pas des tri-points (les points verts dans la figure 7(b)). On a représenté en figure 8 ce réseau, en rouge.

On vérifie alors aisément qu'avec ce réseau, les quatre conditions de la définition de connectante sont vérifiées (les traits bleus sur la figure 8 montrent une exemple du graphe qui relie une facette externe non port à une autre, pour le point 2).

Ainsi,  $\sigma$  est une bonne substitution combinatoire. ■

FIGURE 8 – Le réseau  $N$ 

## 4.2 Décoration

Dans ce paragraphe, on va ajouter des décorations aux hexagones  $P$ . Cela correspond à ajouter des couleurs pour faire des tuiles de Wang à partir de ces hexagones. On note  $T_0, \dots, T_6$  les tuiles de  $Q$  et  $f_1, \dots, f_{12}$  les arêtes internes de  $Q$  (voir sur la figure 7(b)). On définit alors une application  $N_\sigma: \{1, \dots, 6\}^2 \rightarrow \{f_i\}_{1 \leq i \leq 12} \cup \{P, M\}$ , telle que  $N_\sigma(i, k)$  est la valeur de la  $k$ -ème facette de  $T_i$  (si celle-ci est une des  $f_i$ ) ou bien une valeur spéciale :  $P$  s'il s'agit d'un port, ou  $M$  si ce n'en est pas un (mais appartient à une macro-facette).

On va donner à chaque facette de chaque tuile une décoration, qui sera représentée par un triplet  $(f, j, g)$  où :

- $f$  est le *macro-indice* de la facette. On a  $f \in \{f_i\}_i \cup \{P, M\}$ .
- $j$  est le *parent-indice* de la facette. On a  $j \in \{T_i\}_i \cup \{Z\}$ .
- $g$  est le *voisin-indice* de la facette. On a  $g \in \{f_i\}_i \cup \{P, M\}$ .

Deux tuiles adjacentes correspondent si elles ont le même triplet  $(f, j, g)$  sur la facette commune aux deux tuiles. Ces triplets correspondent aux couleurs d'un alphabet pour une jeu de tuiles de Wang. Ainsi, une tuile *décorée* est un hexagone, dont chaque facette est dotée d'un triplet  $(f, j, g)$ .

Pour chaque facette, on aura donc  $14 \times 8 \times 14 = 1568$  possibilités de triplets, le jeu de tuiles aura donc au plus  $1568^6 = 1.49 \cdot 10^{19}$  tuiles. On va procéder étape par étape pour ajouter ces décorations aux tuiles et définir notre nouveau jeu de tuiles  $\tau$ .

1. On pose, pour le macro-indice de la  $k$ -ème facette de la tuile  $T_j$ ,  $N_\sigma(j, k)$  (voir figure 9(a)). Ainsi, on est sûr que tout  $\tau$ -pavage peut être vu de manière unique comme un pavage de  $\tau$ -macro-tuiles. Cette étape correspond à la couche 1 des décorations de la section précédente (3.3). Le jeu de tuiles décorées possède pour l'instant 7 tuiles.
2. On considère une tuile non centrale de  $Q$  (c'est-à-dire un  $T_i$  pour  $i \neq 0$ ). On va définir, sur les facettes intérieures qui ne sont pas traversées par le réseau, un même parent-indice, qui sera appelé l'*indice parent* de la tuile. La tuile  $T_j$  correspondante est alors appelée la *tuile parent*. Cet indice peut être n'importe quel  $j$ , pour  $j \in \{0, \dots, 6\}$ . Les facettes externes, sauf le port, ont un parent-indice valant  $Z$  (une couleur « nulle »). Cela permet d'assurer que les  $\tau$ -tuiles non centrales d'une  $\tau$ -macro-tuile ont un même indice parent (voir figure 9(b)). Cette étape correspond au « cercle » de fil de la couche 2 qui parcourt l'intérieur de la macro-tuile dans ce qu'on avait fait précédemment. Pour chaque  $T_i$  ( $i \neq 0$ ), on a ajouté 7 décorations, on a donc pour l'instant 42 tuiles non centrales, plus une centrale; donc 43 tuiles.
3. Pour toute  $\tau$ -tuile non centrale ayant  $j$  comme indice parent, pour toute facette qui n'est ni un port de la macro-tuile, ni traversée par le réseau (voir figure 8), on définit, suivant le cas, son voisin-indice par (cf figure 9(c)) :
  - $N_\sigma(j, k)$ , c'est-à-dire le macro-indice, si elle est dans la  $k$ -ème macro-facette,
  - Égal à son macro-indice sinon.
 Cela assure que les macro-facettes (auxquelles on a enlevé les ports) d'une macro-tuile sont correspondent au macro-indice de la tuile parent  $T_j$ .

4. Soit une tuile non centrale ayant  $j$  comme indice parent. La facette qui est  $k$ -ème port, et celle qui est traversée par la  $k$ -ème branche du réseau (pour  $k$  allant de 1 à 6, en vert sur la figure 8), ont toutes deux la même paire de parent/voisin-indices. Cette paire est la paire de la  $k$ -ème facette de  $T_j$ , si celle-ci est déjà définie lors des étapes 1 à 3 (c'est-à-dire si cette facette n'est pas traversée par le réseau), ou bien n'importe quelle paire définie aux étapes 1 à 3 sinon. Si plusieurs paires sont possibles, on crée une nouvelle tuile pour chacune de ces paires. On effectue cela sur toutes les tuiles non centrales. Cette étape assure que chaque port d'une  $\tau$ -macro tuile est équivalent à la paire de parent/voisin-indices d'une tuile parent décorée, et permettra de désubstituer. Ces deux dernières étapes correspondant aux fils des couches 2 et 3 qui partent d'une macro-tuile à l'autre dans 3.3. À la fin de ces deux étapes, on a 1656 tuiles non centrales entièrement décorées (et toujours la tuile centrale dont seuls les macro-indices sont définis).
5. Pour chaque tuile non centrale  $\mathcal{T}$ , on définit une nouvelle tuile centrale  $\mathcal{T}'$  en donnant à chaque  $k$ -ème facette de  $\mathcal{T}'$  la paire de parent/voisin-indices de la  $k$ -ème facette de  $\mathcal{T}$  (les macro-indices sont définis comme à l'étape 1). On dit alors que  $\mathcal{T}'$  *dérive* de  $\mathcal{T}$ . On multiplie par 2 le nombre de tuiles totalement

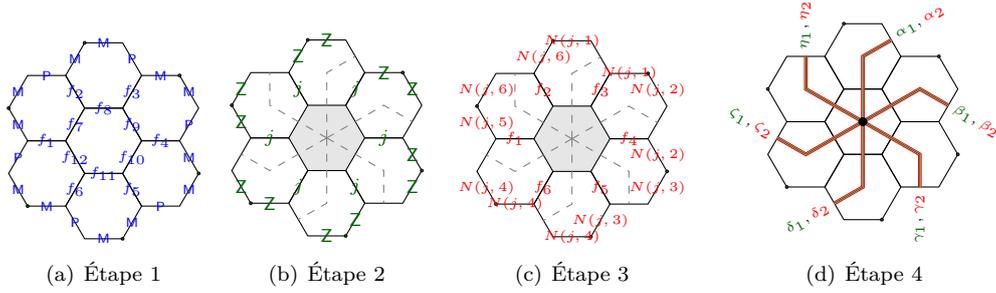


FIGURE 9

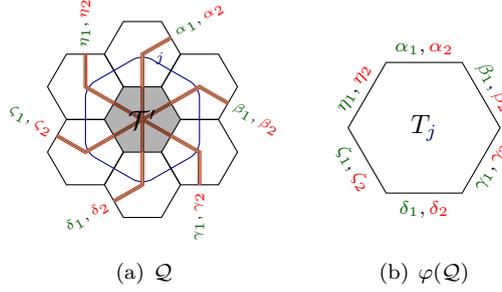


FIGURE 10 – (on n'a représenté que les informations nécessaires)

décorées, le jeu de tuiles décorées, que l'on note  $\tau$ , possède donc 3 328 tuiles (ce qui représente beaucoup moins que les  $1.49 \cdot 10^{19}$  possibilités).

### 4.3 Résultats

On utilise ici la définition de [8] de jeu de tuiles auto-simulant :

**Définition 4.4.** Soit  $\sigma$  une substitution combinatoire avec les règles  $\{(P_i, Q_i, \gamma_i)\}$ . On dit qu'un jeu de tuiles  $\tau$  est *auto-simulant* pour  $\sigma$  s'il existe un ensemble de macro-tuiles décorées et une application  $\varphi$  de ces macro-tuiles vers  $\tau$  tels que :

1. Pour toute macro-tuile décorée  $\mathcal{Q}$ , il existe un  $i$  tel que  $\pi(\mathcal{Q}) = Q_i$  et  $\pi(\varphi(\mathcal{Q})) = P_i$  ( $\pi$  est l'application de projection qui retire les décorations).
2. Tout pavage par des tuiles de  $\tau$  peut être vu comme un pavages par des macro-tuiles.
3. Pour toutes macro-tuiles  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ , la  $a$ -ème macro-facette de  $\mathcal{Q}$  est compatible avec la  $b$ -ème macro-facette de  $\mathcal{Q}'$  ssi la  $a$ -ème facette de  $\varphi(\mathcal{Q})$  est compatible avec la  $b$ -ème facette de  $\varphi(\mathcal{Q}')$ .

**Proposition 4.5.** *Le jeu de tuiles  $\tau$  s'auto-simule (pour  $\sigma$ ) et  $\sigma$  est consistante.*

*Preuve.* Montrons d'abord que le jeu de tuiles s'auto-simule. Soit  $\mathcal{Q}$  une  $\tau$ -macro-tuile avec  $j$  comme indice parent, et  $\mathcal{T}'$  comme tuile centrale. On définit la tuile décorée  $\varphi(\mathcal{Q})$  en donnant à la  $k$ -ème facette de  $T_j$  les parent/voisin-indices de la  $k$ -ème facette de  $\mathcal{T}'$  (voir figure 10). Alors  $\varphi$  vérifie les axiomes de la définition 4.4. Ainsi le jeu de tuiles s'auto-simule.

Pour montrer la consistence, il reste donc à montrer que  $\varphi(\mathcal{Q}) \in \tau$ . Soit  $\mathcal{T}$  une  $\tau$ -tuile centrale dont dérive  $\mathcal{T}'$ . On note  $j$  l'indice parent de  $\mathcal{T}$ . Si  $j = 0$  (c'est-à-dire on est sur une tuile centrale), alors  $\varphi(\mathcal{Q})$  dérive aussi de  $\mathcal{T}$  car le contenu des facettes de  $\varphi(\mathcal{Q})$  est le même que celui de  $\mathcal{T}'$ . Dans le cas contraire ( $j \neq 0$ ), d'après l'étape 4, pour tout  $k$ , les parent/voisin-indices de la  $k$ -ème facette de  $\mathcal{T}'$  apparaissent sur la  $k$ -ème facette d'une certaine tuile décorée  $T_j$ . C'est en particulier vrai pour les facettes de  $T_j$  qui ne sont pas traversées par le réseau. Comme les voisins-indices de ces facettes ne peuvent apparaître seulement sur une  $T_j$  (d'après les étapes 1 et 3),  $\mathcal{T}$  est un  $T_j$  décoré. Il vient alors que  $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{T}$  et donc  $\varphi(\mathcal{Q}) \in \tau$ . ■

On définit une substitution  $s: \tau \rightarrow \tau^{\otimes 6}$  de la façon suivante : soit une tuile  $t \in \tau$ . Alors  $t$  est un certain  $T_j$ , avec des décorations supplémentaires. On commence par dériver  $t$ , ce qui nous donne une tuile centrale, puis on définit les 6 tuiles restantes en respectant les étapes précédemment décrites : leurs macro-indices sont décrits par l'étape 1, les parent/voisins-indices des facettes non traversées par le réseau sont définis par les étapes 3, 4 et

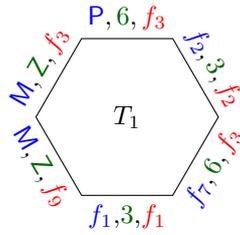


FIGURE 11 – Première tuile

l'indice parent de l'étape 2 est le  $j$  de la tuile de départ. Enfin, l'étape 4 assure que les informations transportées sur le réseau sont compatibles avec la tuile centrale. Ainsi, la macro-tuile de la figure 10(a) est l'image de la tuile de la figure 10(b) par  $s$ .

**Théorème 4.6.** *Le jeu de tuiles  $\tau$  est apériodique.*

*Preuve.* Pour montrer ce résultat, on va utiliser le théorème 3.20. Comme dans la démonstration du théorème 3.21, le jeu de tuiles a été construit de sorte que les motifs arbitrairement grands engendrés par la substitution soient valides. Ainsi, le jeu de tuiles admet un pavage.

Soient  $\mathcal{T} \in P_\tau$  un pavage valide avec des tuiles de  $\tau$ , et  $z \in \mathfrak{S}$ . Alors d'après la proposition précédente, chaque macro-tuile de  $\mathcal{T}$  est l'image d'une tuile de  $\tau$  (par consistance de  $\sigma$ ) et le coloriage obtenu en désubstituant ces macro-tuiles est encore un pavage valide (d'après le point 3 de l'auto-simulation pour  $\sigma$ ). Donc  $\sigma_z s(\mathcal{T}) \in P_\tau$ . Ainsi le jeu de tuiles  $\tau$  est auto-simulant (au sens de la définition 3.18).

Montrons que la substitution est non ambiguë. On sait déjà que tout pavage possède une pré-image par la substitution. Soit  $\mathcal{Q}$  une macro-tuile  $\tau$ . D'après l'étape 3 de la construction du jeu de tuiles, l'indice parent de  $\mathcal{Q}$  est compatible avec les indices parents des macro-tuiles voisines. L'étape 4 assure qu'il n'y a aucune ambiguïté lors de la désubstitution, car la paire de voisin/parent indice sur les ports d'une macro- $k$ -tuile est la même pour toute la macro- $k+1$ -tuile. Ainsi,  $s$  est non ambiguë.

Ainsi, d'après le théorème 3.20, le jeu de tuiles  $\tau$  est apériodique. ■

#### 4.4 Construction du jeu de tuiles avec `OCaml`

On l'a vu précédemment, les 5 étapes de la création donnent un jeu de tuiles au cardinal 3312. On peut coder ces différentes étapes avec `OCaml`, et ainsi avoir en sortie le jeu avec toutes les tuiles. On retrouve alors les 3312 tuiles du jeu.

On peut toutefois trouver un jeu de tuiles stable par la substitution avec un cardinal encore plus petit. Pour le faire, on va construire un tel jeu en partant d'une seule tuile. En appliquant la substitution, d'autres tuiles de  $\tau$  vont intervenir, mais pas forcément toutes. On réapplique la substitution à ces nouvelles tuiles, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles tuiles.

En exécutant cela avec la tuile de départ donnée en figure 11, on trouve un jeu de tuiles ayant 2328 tuiles. On peut aussi effectuer cela à partir des 3328 tuiles du jeu, pour trouver celles qui engendrent le jeu le plus petit possible. On trouve alors que ce jeu, que l'on appelle  $\tau_0$  dans la suite, possède 2328 tuiles.

#### 4.5 Minimalité du jeu de tuiles

On va montrer dans cette section que le jeu de tuiles  $\tau_0$  est minimal, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun jeu de tuiles inclus dans  $\tau_0$  ayant un cardinal plus petit qui engendre encore un pavage apériodique. On l'a vu précédemment, l'ensemble des pavages obtenus par un jeu de tuiles est un sous-shift. On cherche donc à montrer que ce sous-shift est minimal. Pour ce faire, on va utiliser la proposition 3.9 précédemment énoncée.

**Lemme 4.7** (vérifié avec `OCaml`). *Les 2328 tuiles de  $\tau_0$  engendrent toutes le même jeu  $\tau_0$ .*

**Théorème 4.8.** *Soit  $\mathbf{T}$  le sous-shift obtenu à partir du jeu de tuiles  $\tau_0$ . Alors  $\mathbf{T}$  est minimal. Le jeu de tuiles  $\tau_0$  l'est donc aussi.*

*Preuve.* Commençons par introduire la *matrice d'adjacence* de la substitution  $s$ . On énumère, pour  $i$  de 1 à 2328 les tuiles de  $\tau_0$  (dans la suite, on appelle  $i$  la tuile numéro  $i$ ). La matrice d'adjacence de  $s$  est la matrice  $M_s \in \mathcal{M}_{2328}(\mathbb{N})$  telle que pour tous  $i, j$ ,  $M_{s,(i,j)}$  est le nombre de fois où  $j$  apparaît dans  $s(i)$ . Ainsi, si  $k > 0$ ,  $M_{s,(i,j)}^k$  est le nombre de fois où  $j$  apparaît dans  $s^k(i)$ . Montrons qu'il existe un rang  $K$  à partir duquel toutes les tuiles sont dans l'image de toutes les autres, c'est-à-dire montrons que  $\exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K, \forall i, j, M_{s,(i,j)}^k > 0$ . Dans un premier temps, soit  $i$  une tuile centrale. Par définition de la substitution, en appliquant celle-ci,  $i$

sera encore présente. D'après le lemme ci-dessus, toute tuile  $j$  apparaîtra à partir d'un certain rang  $k_j$ , et restera donc présente après de nouvelles applications de la substitution. Ainsi,  $\forall j, \exists k_j$  tel que  $M_{s,(i,j)}^{k_j} > 0$  et  $\forall k \geq k_j, M_{s,(i,j)} > 0$ . On pose maintenant  $K_i = \max_j k_j$  le temps à partir duquel toutes les tuiles apparaissent dans l'image itérée de  $i$ ; et  $\tilde{K} = \max_{i \text{ centrale}} K_i$ . On a alors  $\forall k \geq \tilde{K}, \forall i \text{ centrale}, \forall j, M_{s,(i,j)} > 0$ . Soit maintenant  $i$  quelconque. On y applique la substitution. Une tuile centrale est alors créée (la dérivée de  $i$ ). On peut alors appliquer ce qui précède, à partir de ce rang  $k = 1$ . On pose  $K = \tilde{K} + 1$ . On a alors  $\forall k \geq K, \forall i, j, M_{s,(i,j)} > 0$ .

Soient  $x, y \in \mathbf{T}$ . Soit  $p$  un motif tel que  $p \sqsubset x$ . Montrons que  $p \sqsubset y$ . D'après ce qui précède, toutes les tuiles apparaissent dans le pavage engendré par n'importe quelle tuile. Les substitutions de toutes les tuiles le sont derechef, puisque pour définir l'ensemble limite, on effectue les substitutions sur toutes les tuiles. Or,  $p$  est obtenu en effectuant  $k$  substitutions à partir d'une tuile de  $\tau_0$ , car la substitution est non ambiguë. Ainsi,  $p \sqsubset y$ . On a donc montré que  $\mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(y)$ . La seconde inclusion se montre de la même manière. Ainsi, d'après la proposition 3.9,  $\mathbf{T}$  est minimal. ■

## 4.6 Représentation graphique du pavage

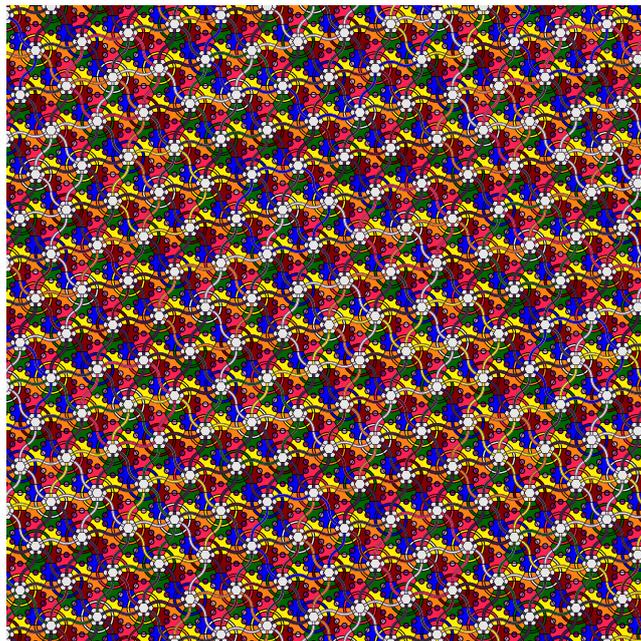
Maintenant qu'on a notre pavage apériodique, obtenu en appliquant la substitution une infinité de fois à partir d'une tuile de  $\tau_0$ , on peut le tracer pour le visualiser. On représente une tuile ainsi : on commence par se donner 7 couleurs (●, ●, ●, ●, ●, ●, ●) qui représentent la couche 1 de la tuile, c'est-à-dire respectivement,  $T_0, T_1, \dots, T_6$ . Pour représenter la couleur Z, on utilise la couleur ●, et on représente chaque élément de  $\{f_i\} \cup \{M, P\}$  avec un dégradé de violet (■■■■■■■■). Certaines informations sont déterminées par la couleur de la tuile ou l'indice parent (c'est le cas par exemple des macros-indices et des voisin-indices sur les facettes intérieures non traversées par le réseau). De même, les parent-indices des facettes extérieures non port sont Z. Il n'est donc pas nécessaire de les représenter. L'indice parent de la tuile est représenté par un fil à bord noirs épais qui relie les facettes intérieures non traversées par le réseau, et la paire parent/voisin-indices est représentée par un fil dont l'intérieur est le parent-indice et l'extérieur est le voisin-indice. Enfin, les voisin-indices des autres facettes extérieures, sont représentées par un cercle portant la couleur du voisin-indice.

On représente donc ainsi la tuile de la figure 11 :



On peut alors itérer la substitution à partir d'une tuile (ici à partir de celle de la figure 11) pour avoir une partie du pavage (on ne pourra pas l'itérer une infinité de fois!). On a représenté en figure 12 quatre itérations de la substitution.

Voici une partie du pavage obtenu :



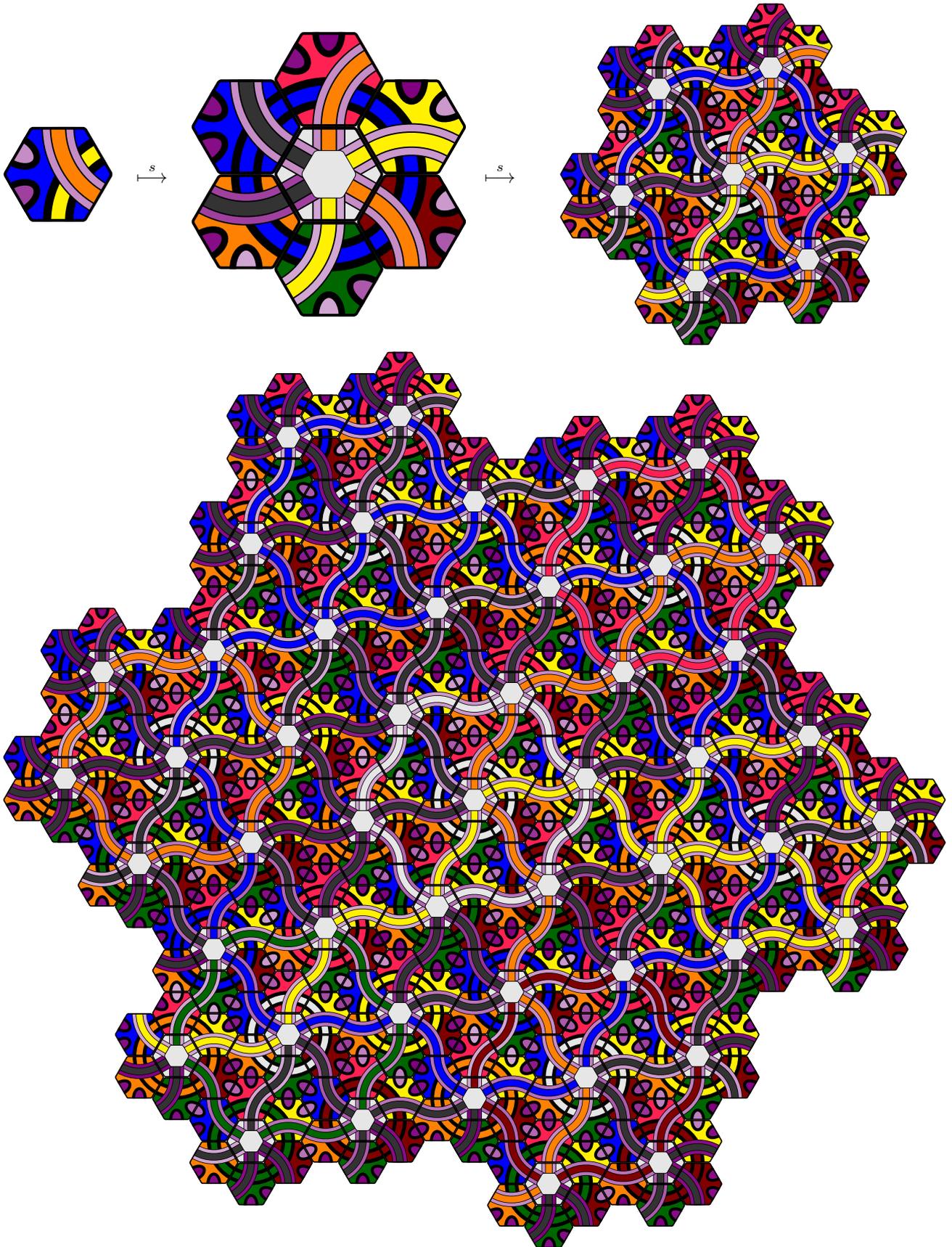


FIGURE 12 – Quatre images successives d'une tuile par la substitution

Pour mieux visualiser la structure du pavage, on peut ajouter des décorations aux tuiles centrales en coloriant leur centre suivant dans quel type de macro<sup>k</sup>-tuile elles se situent. Ensuite, on ne trace que les parents-indices qui font le tour des macro<sup>k</sup>-tuiles (pour  $k > 1$ ). Le résultat est donné en figure 13(a). On peut aussi ne tracer aucun trait reliant les différentes tuiles centrales, mais simplement représenter les macro-tuiles par des cercles (en alternant la couleur bleue et la rouge suivant la taille). L'arbre ainsi obtenu est représenté en figure 13(b).

## 4.7 Soficité de l'ensemble limite

On rappelle (voir définition 3.14) qu'un sous-shift  $\mathbf{T}$  de  $\Sigma^H$  est sofique s'il existe un alphabet  $\Gamma$ , un SFT  $\mathbf{U}$  de  $\Gamma^H$  et une projection  $\pi: \Gamma \rightarrow \Sigma$  tels que  $\pi(\mathbf{U}) = \mathbf{T}$ . On va montrer un résultat de soficité de l'ensemble limite d'une substitution hexagonale  $s$  quelconque :

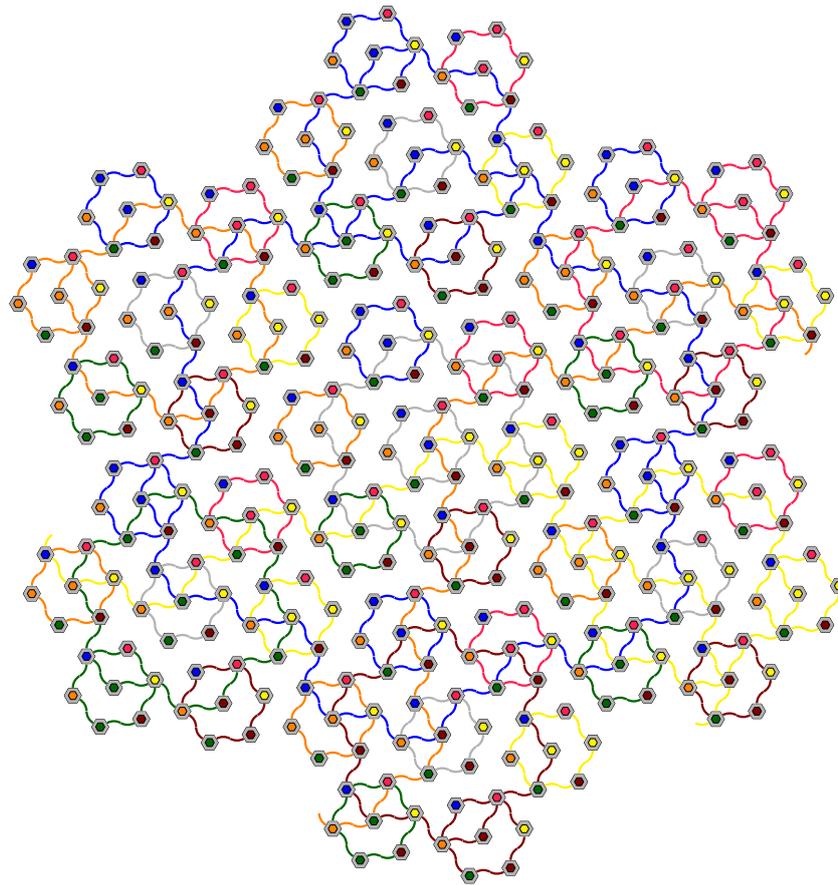
**Théorème 4.9.** *Soit  $s$  une bonne substitution combinatoire sur un jeu de tuiles hexagonales, avec des lettres sur ces tuiles. Alors le sous-shift  $\Lambda_s$  est sofique.*

*Preuve.* On construit un jeu de tuiles  $\tau$  comme on l'a fait dans la section 4.4, mais cette fois-ci on part des tuiles hexagonales avec les lettres dessus. Il y aura donc plus de possibilité de tuile pour la couche 1 : au lieu d'avoir seulement  $T_0, \dots, T_6$ , on aura un élément de  $\{T_i\} \times A$ , où  $A$  désigne l'ensemble des lettres sur les tuiles de base. On pose  $\tau' := \{T_i\} \times A$ . Par construction, ce jeu de tuiles simule une substitution, que l'on notera  $s'$ . On appelle  $\pi$  la projection de  $\tau$  dans  $A$  qui ne garde que le lettre des tuiles. Comme  $\tau$  est un jeu de tuiles,  $P_\tau$  est un SFT (voir exemple 3.13), il vient que  $\pi(P_\tau)$  est sofique.

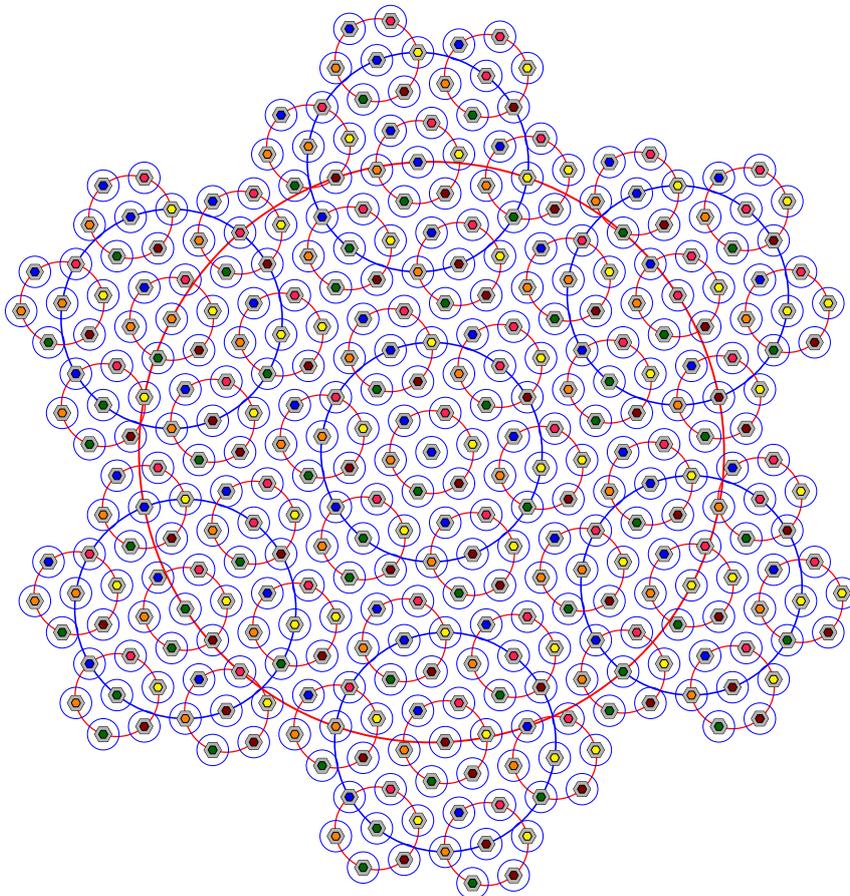
Dans  $\Lambda_{s'}$ , il peut y avoir des coloriages qui possèdent une erreur de pavage : en effet, si on part d'un coloriage du plan qui possède une telle erreur en un point, en y appliquant la substitution une infinité de fois, il y aura toujours une erreur en ce point, sur la frontières des macro-tuiles. On veut montrer que  $\Lambda_s$  (qui est aussi  $\pi(\Lambda_{s'})$ ) est sofique.

Soit  $c$  un pavage de  $\Lambda_{s'}$ . Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de pré-images successives de  $c$ . Étant donné un entier  $n > 0$ ,  $c_n$  peut être vu comme un pavage avec des tuiles de  $\tau'$  : en effet, si on prend une macro-tuile de  $c_{n-1}$ , elle correspond à une tuile de  $\tau'$ , par non ambiguïté de la substitution, et les erreurs de pavage n'apparaissent que sur les facettes traversées par le réseau dans la macro-tuile. On peut itérer cela jusqu'à  $c = c_0$  et la troisième condition de la connectivité de la substitution (voir définition 4.2) assure que les erreurs de pavage n'apparaissent que sur une « grille » dont les cases sont de plus en plus grandes (cette grille est représentée de façon schématique en figure 13). Ainsi, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on peut voir  $c$  comme un  $\tau'$ -pavage où on est dans l'un de ces deux cas : les erreurs de pavage forment soit une étoile avec 7 branches infinies, soit une unique branche bi-infinie.

Dans le premier cas, on remplace la  $\tau'$ -tuile centrale de l'étoile par n'importe quelle tuile de  $\tau$ , puis les tuiles sur les 7 branches par des tuiles de  $\tau$  qui sont compatibles avec celles déjà remplacées, jusqu'à l'infini. Dans l'autre cas, on remplace les  $\tau'$ -tuiles par des tuiles de  $\tau$  qui transmettent l'information sur la branche bi-infinie toute entière. Ainsi, dans les deux cas,  $c$  peut être vu comme un  $\tau$ -pavage, sans erreur de pavage. Ainsi,  $\Lambda_s$  est sofique. ■



(a)



(b)

FIGURE 13 – Structure du pavage

## Références

- [1] Robert BERGER : *The Undecidability of the Domino Problem*. Thèse de doctorat, Harvard University, 1964.
- [2] Raphael M. ROBINSON : Undecidability and nonperiodicity for ti-lings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3):177–209, 1971.
- [3] Nicolas OLLINGER : Two-by-two Substitution Systems and the Undecidability of the Domino Problem. 10+6 pages, janvier 2008.
- [4] Emmanuel JEANDEL et Michael RAO : An aperiodic set of 11 wang tiles. *CoRR*, abs/1506.06492, 2015.
- [5] Bastien LE GLOANNEC : *Coloriage du plan discret par jeux de tuiles déterministes*. Thèse de doctorat, Université d’Orléans, 2014. Section 1.2.
- [6] Mathieu SABLİK : Pavages : du local au global, 2012. LATP, Université de Provence ; Section 2.3.2.
- [7] Bruno DURAND, Leonid LEVIN et Alexander SHEN : Local rules and global order, or aperiodic tilings. *The Mathematical Intelligencer*, 27(1):64–68, Dec 2005.
- [8] Thomas FERNIQUE et Nicolas OLLINGER : Combinatorial Substitutions and Sofic Tilings. *In TUCS*, éditeur : *Journées Automates Cellulaires 2010*, pages 100–110, Turku, Finland, décembre 2010.