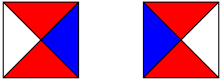
Construction de jeux de tuiles apériodiques sur grille hexagonale

Thomas Saigre

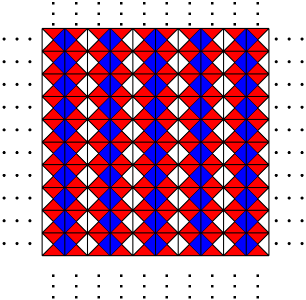
9 décembre 2021

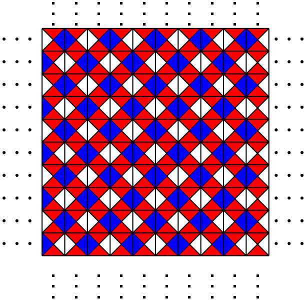
Exemple 1

On part de ce jeu de 2 tuiles :



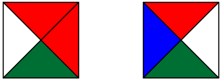
Exemple 1





Exemple 2

Prenons maintenant ces deux tuiles :

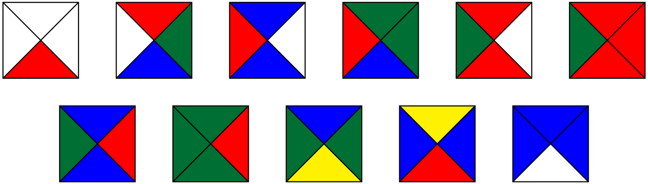


Il est impossible de paver le plan avec ce jeu de tuiles.

Plus petit jeu de tuiles de Wang apériodique

Théorème [Jeandel and Rao 2015]

Le plus petit jeu de tuiles de Wang qui soit apériodique possède 11 tuiles.



Autres grilles régulières

Figure 1: Triomino

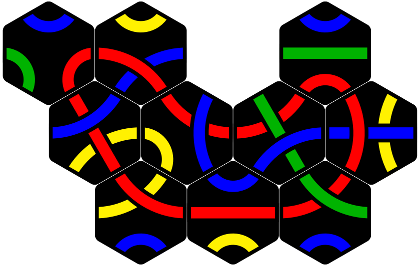


Figure 2: Tantrix

Pavage de Penrose

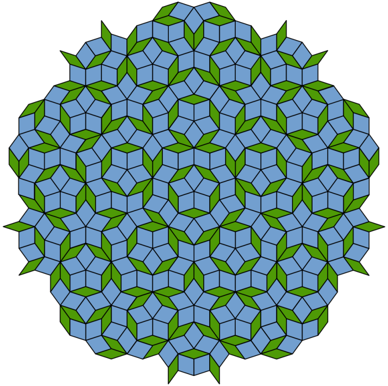
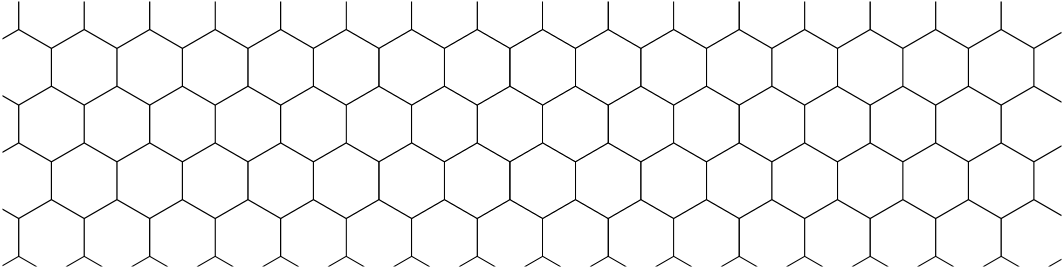


Figure 3: Pavage de Penrose

Construction d'un jeu de tuiles hexagonal en utilisant une substitution combinatoire

Référence utilisée

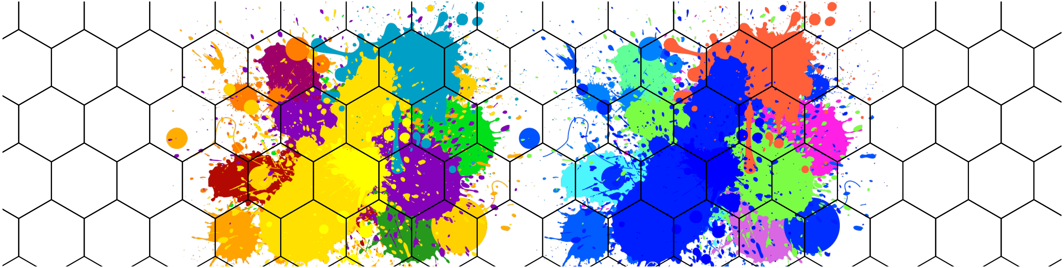
Thomas Fernique and Nicolas Ollinger (Dec. 2010). "Combinatorial Substitutions and Sofic Tilings". In: *Journées Automates Cellulaires 2010*. Ed. by TUCS. Turku, Finland, pp. 100–110. URL: `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00541992`



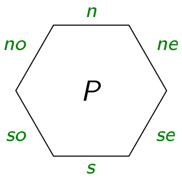
Construction d'un jeu de tuiles hexagonal en utilisant une substitution combinatoire

Référence utilisée

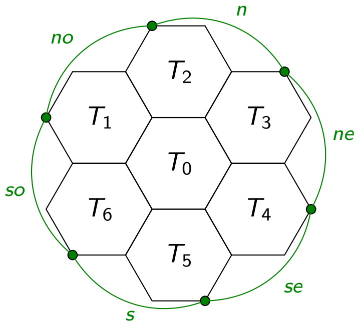
Thomas Fernique and Nicolas Ollinger (Dec. 2010). "Combinatorial Substitutions and Sofic Tilings". In: *Journées Automates Cellulaires 2010*. Ed. by TUCS. Turku, Finland, pp. 100–110. URL: `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00541992`



Substitution combinatoire



(a) La tuile de base P, sans les décorations. . .



(b) . . . est envoyée sur la macro-tuile Q

Figure 4: Définition de la substitution σ

Bonne substitution

Définition

Une substitution σ est une *bonne substitution* si :

- elle est *consistante*, c'est-à-dire que tout pavage par macro-tuile admet une pré-image par σ
- elle est *connectante*, c'est-à-dire que pour chaque règle (P, Q, γ), le *graphe dual* de Q (le graphe dont les sommets sont les centres des tuiles de Q et les arêtes relient les tuiles adjacentes) a un sous-graphe N, appelé *réseau* tel que :
  1. N est étoilé, avec une branche pour chaque macro-facette, et la feuille de la k-ème branche est une tuile de la k-ième macro-facette de Q, appelée le k-ème *port*.
  2. Chaque macro-facette a des facettes qui ne sont pas des ports, et en enlevant les arêtes de N et son sommet central, on obtient un graphe qui connecte toutes ces facettes non port.
  3. Le centre de N correspond à une tuile de l'intérieur de Q, appelée *tuile centrale*.
  4. Si deux macro-tuiles sont compatibles selon un port, alors elles sont aussi compatibles selon la macro-facette correspondante.

Décoration des facettes

On donne à chaque facette de chacune des tuiles une décoration : un triplet (f, j, g) défini par :

- f est l'*indice macro* de la facette, $f \in \{f_i\}_i \cup \{\mathbf{P}, \mathbf{M}\}$,
- j est l'*indice parent* de la facette, $j \in \{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$,
- g est l'*indice voisin* de la facette, $g \in \{f_i\}_i \cup \{\mathbf{P}, \mathbf{M}\}$

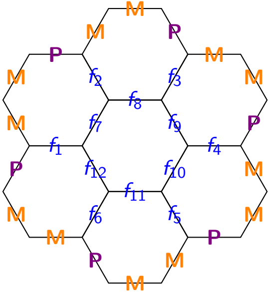
Décoration des facettes

On donne à chaque facette de chacune des tuiles une décoration : un triplet (f, j, g) défini par :

- f est l'*indice macro* de la facette, $f \in \{f_i\}_i \cup \{\mathbf{P}, \mathbf{M}\}$,
- j est l'*indice parent* de la facette, $j \in \{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$,
- g est l'*indice voisin* de la facette, $g \in \{f_i\}_i \cup \{\mathbf{P}, \mathbf{M}\}$

Pour chaque facette, on a $14 \times 8 \times 14 = 1\,568$ possibilités de triplets, le jeu de tuiles aura donc en tout au plus $1\,568^7 = 2.33 \cdot 10^{22}$ tuiles.

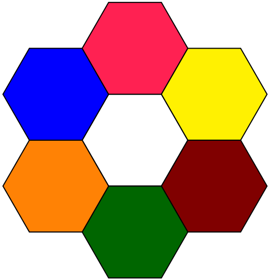
Construction du jeu de tuiles : étape 1 (indice macro)



$N_\sigma : \{1, \ldots, 6\}^2 \to \{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 12} \cup \{\mathbf{P}, \mathbf{M}\}$ telle que

$$N_\sigma(i,k) = \begin{cases} \text{la valeur de la } k\text{-ème facette de } T_i \\ \mathbf{P} \text{ si c'est un port} \\ \mathbf{M} \text{ si l'arête fait partie d'une macro-facette} \end{cases}$$

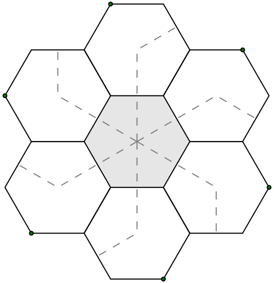
Construction du jeu de tuiles : étape 1 (indice macro)



Il y a **7** tuiles.

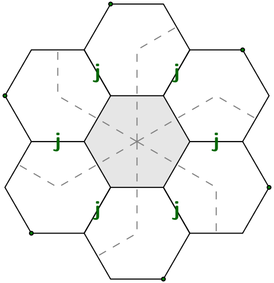
Construction du jeu de tuiles : étape 2 (indice parent)

j : indice parent de la tuile (dans $\{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$)



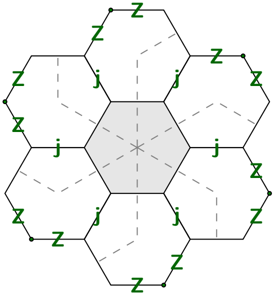
Construction du jeu de tuiles : étape 2 (indice parent)

j : indice parent de la tuile (dans $\{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$)



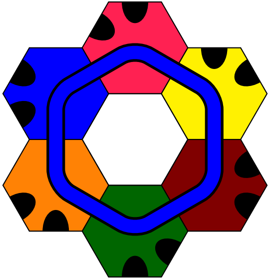
Construction du jeu de tuiles : étape 2 (indice parent)

j : indice parent de la tuile (dans $\{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$)



Construction du jeu de tuiles : étape 2 (indice parent)

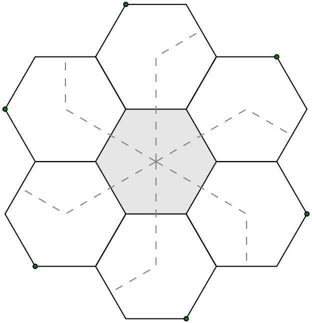
j : indice parent de la tuile (dans $\{T_i\}_i \cup \{\mathbf{Z}\}$)



Il y a 42 tuiles non centrale + 1 centrale = **43** tuiles.

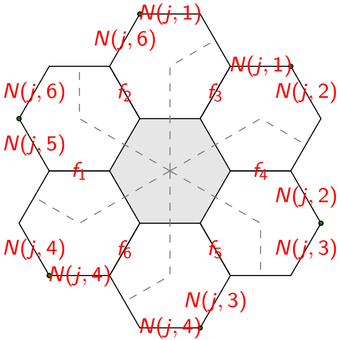
Construction du jeu de tuiles : étape 3 (indice voisin)

On prend une tuile non centrale ayant j comme indice parent.



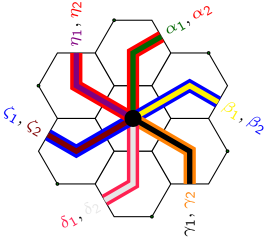
Construction du jeu de tuiles : étape 3 (indice voisin)

On prend une tuile non centrale ayant j comme indice parent.



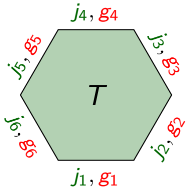
Construction du jeu de tuiles : étape 4 (indice voisin et parent bis)

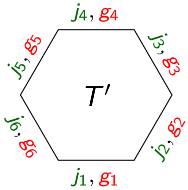
On prend une tuile non centrale ayant j comme indice parent.



Il y a **1 656** tuiles non centrales entièrement décorées (et toujours la tuile centrale).

Construction du jeu de tuiles : étape 5 (décoration des tuiles centrales)





Il y a **3 312** tuiles entièrement décorées.

Apériodicité du jeu de tuiles τ

Théorème

Le jeu de tuiles τ ainsi créé est apériodique.

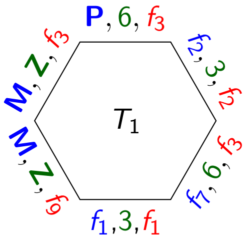
Proof.

- Le jeu de tuile est construit de sorte que la substitution founisse un pavage valide
- Le jeu de tuile est auto-simulant
- La substitution est non ambigüe par les étapes 3 et 4

Donc le jeu de tuiles est apériodique ■

Construction du jeu de tuiles

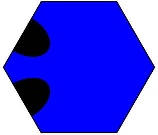
- Les étapes 1 à 5 donnent un algorithme que l'on peut coder pour obtenir les 3 312 tuiles.
- On peut construire un jeu de tuile plus petit : on part d'une unique tuile et on applique la substitution jusqu'à qu'aucune nouvelle tuile n'apparaisse.



On trouve alors un jeu de tuiles τ_0 ayant **2 328** tuiles.

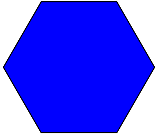
Représentation graphique

- Couche 1 (c'est-à-dire respectivement, $T_0, T_1, \ldots, T_6$) : ●, ●, ●, ●, ●, ●, ●,
- La couleur **Z**, on utilise la couleur ●,
- Chaque élément de $\{f_i\} \cup \{\mathbf{M}, \mathbf{P}\}$ avec un dégradé de violet ()

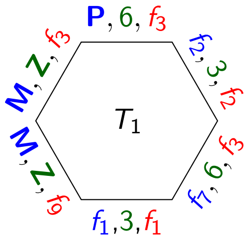


Représentation graphique

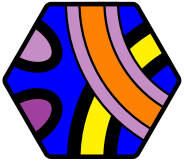
- Couche 1 (c'est-à-dire respectivement, $T_0, T_1, \ldots, T_6$) : ●, ●, ●, ●, ●, ●, ●,
- La couleur **Z**, on utilise la couleur ●,
- Chaque élément de $\{f_i\} \cup \{\mathbf{M}, \mathbf{P}\}$ avec un dégradé de violet ( )

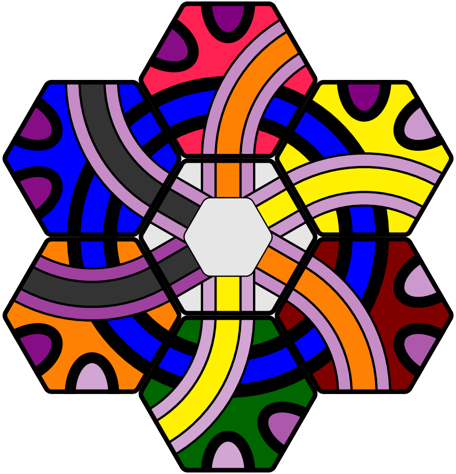


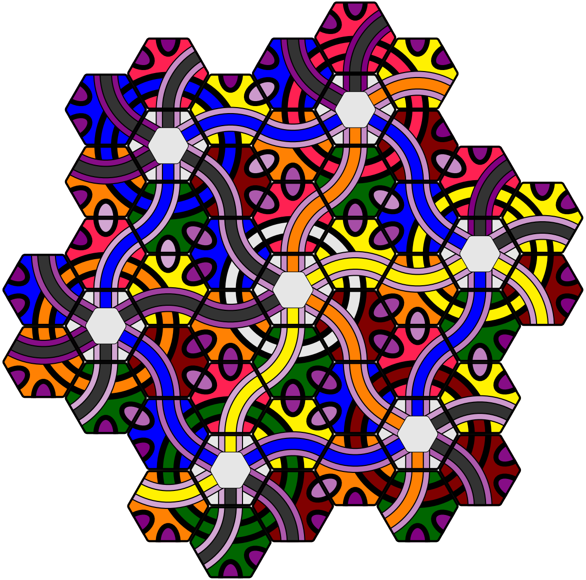
Représentation graphique

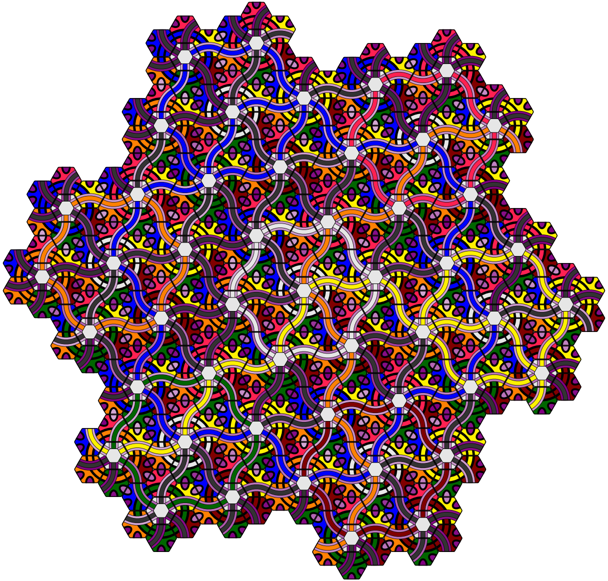


Représentation graphique



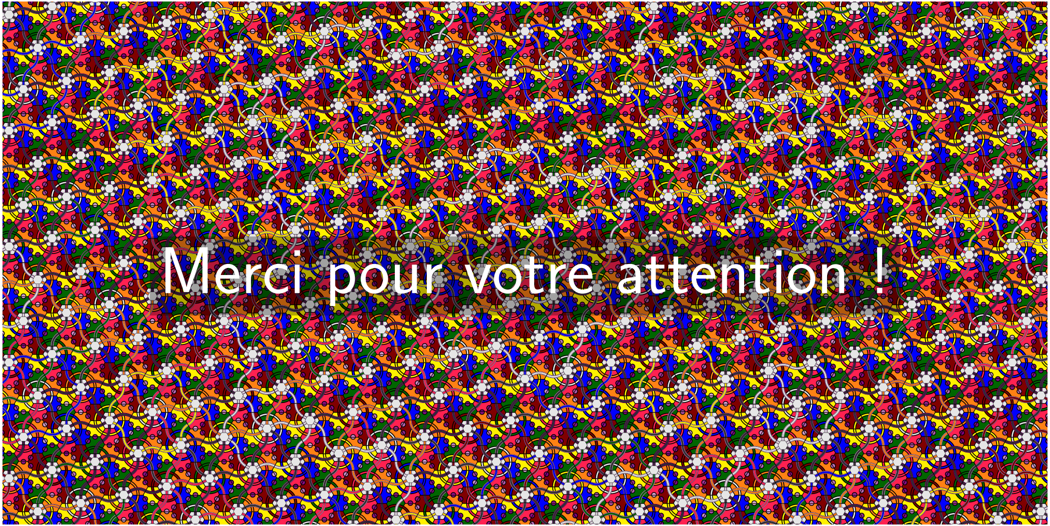






Bibliography I

- Berger, Robert (1964). "The Undecidability of the Domino Problem". PhD thesis. Harvard University.
- Fernique, Thomas and Nicolas Ollinger (Dec. 2010). "Combinatorial Substitutions and Sofic Tilings". In: *Journées Automates Cellulaires 2010*. Ed. by TUCS. Turku, Finland, pp. 100–110. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00541992.
- Jeandel, Emmanuel and Michael Rao (2015). "An aperiodic set of 11 Wang tiles". In: *CoRR* abs/1506.06492. arXiv: 1506.06492. URL: http://arxiv.org/abs/1506.06492.


Merci pour votre attention !