Haben Laien heute in der Mathematik eine Chance ?

oder

Wem glaubt man einen mathematischen Beweis ?

Norbert Schappacher
Université Louis Pasteur
Strasbourg

Konstanz 24. Juni 2008

Man meint .....

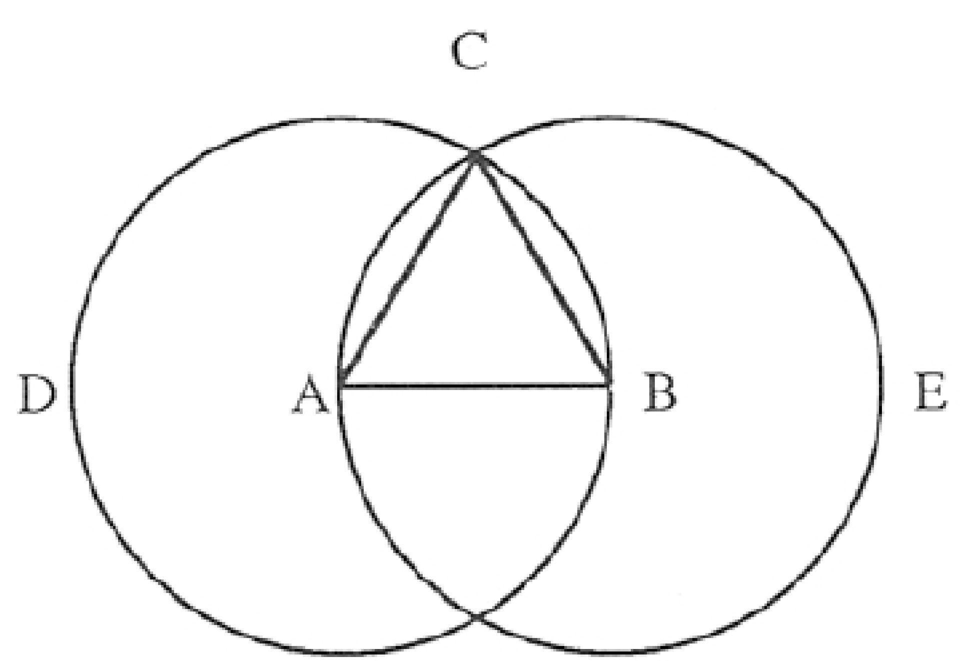
- Mathematik schafft bewiesene und daher unverrückbar sichere Tatsachen, die jeder überprüfen kann.
- Mathematik zu machen bedarf einer speziellen Begabung, die sich, wenn reichlich vorhanden, unabhängig von sprachlicher Kompetenz und sozialer Herkunft ihre Bahn brechen wird.

Beides zusammen müsste hervorragende Möglichkeiten für Aussenseiter eröffnen, an der Erweiterung des mathematischen Wissens teilzunehmen.

Indes .....

- Das (zurecht!) berühmteste mathematische Werk, das rein deduktiv, von anfangs geforderten Axiomen mittels streng ausgearbeiteter Beweise fortschreitet und so die Geometrie und Zahlentheorie seiner Zeit ableitet, sind die 13 Bücher der ELEMENTE des EUKLID (ca. 280 v. Chr.). Aber schon der Beweis von Satz 1 im Buch I enthält eine ungerechtfertigte Annahme :

Satz 1. Gegeben ein Geradenstück, konstruiere ein gleichseitiges Dreieck.



Man meint .....

- Mathematik schafft bewiesene und daher unverrückbar sichere Tatsachen, die jeder überprüfen kann.
- Mathematik zu machen bedarf einer speziellen Begabung, die sich, wenn reichlich vorhanden, unabhängig von sprachlicher Kompetenz und sozialer Herkunft ihre Bahn brechen wird.

Indes .....

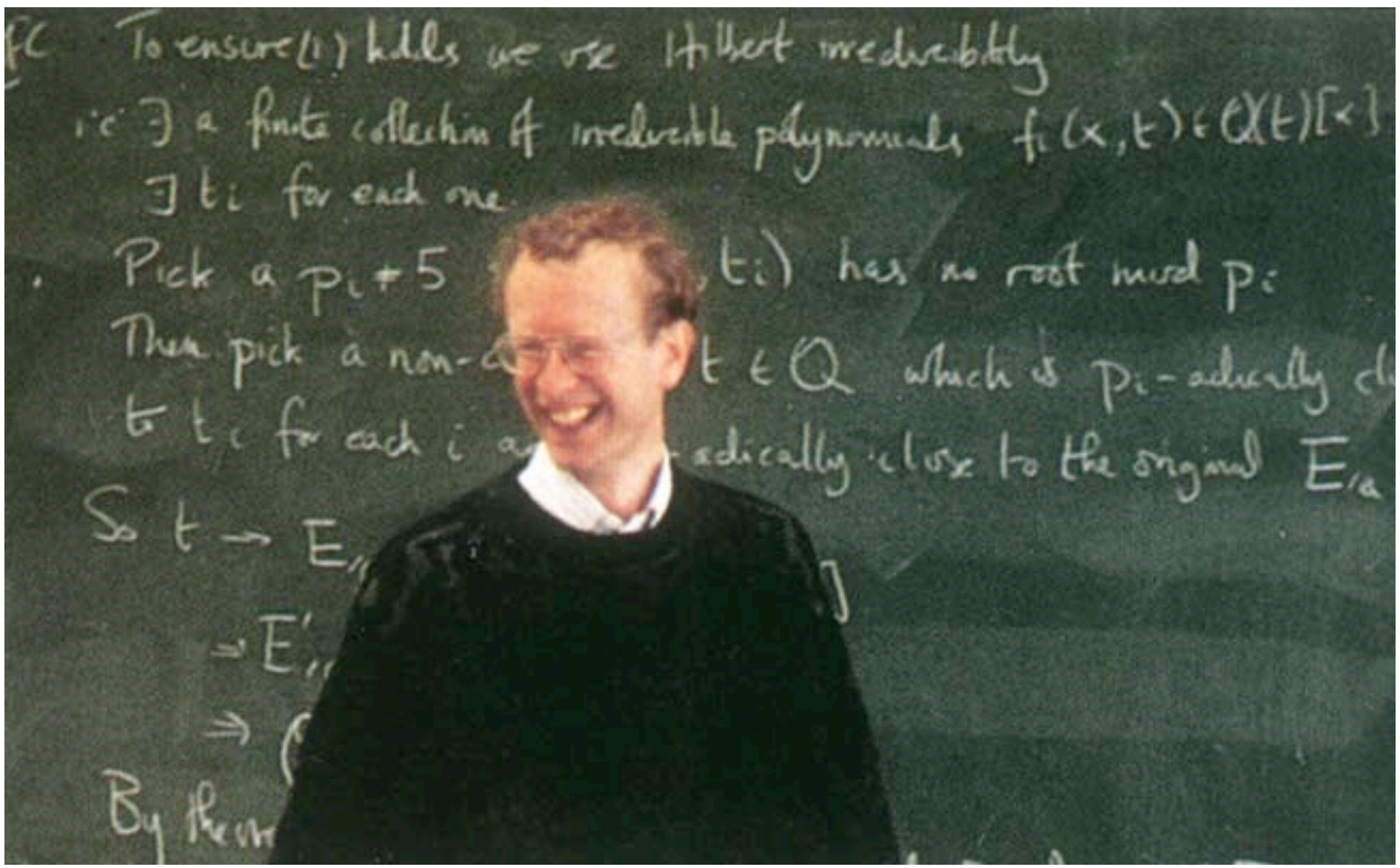
- Niemand wird heute annehmen, dass mathematisches [oder musikalisches, oder ...] Talent bei Mädchen weniger häufig vorkommt als bei Jungen. In der Mathematikgeschichte gibt es aber erheblich weniger berühmte Mathematikerinnen als Mathematiker. Der anerkannte Erfolg in der Mathematik hängt also auch von den sozialen Bedingungen ab, unter denen man/frau sich durchsetzen muss.

Laien oder Aussenseiter sind in dem Moment, wo sie ihre mathematische Entdeckung (oder Erfindung) machen, nicht in der Gesellschaft der Mathematiker etabliert. Das macht es für sie schwierig, die Aufmerksamkeit der *mathematical community* zu erlangen.

Drei Bemerkungen zum Beweis des "Fermatschen Theorems" durch Andrew Wiles

Für ganze Zahlen a, b, c, n mit $n \geq 3$ gilt:

Ist $a^n + b^n = c^n$, so folgt $abc = 0$.



Andrew Wiles 23. Juni 1993

Drei Bemerkungen zum Beweis des "Fermatschen Theorems"

I. Der Wolfskehl Preis von 1908.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Wolfskehlsche Preisstiftung. Bekanntmachung. Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn Dr. Paul Wolfskehl in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100000 ℳ, in Worten: „einhunderttausend Mark", für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des großen Fermatschen Satzes zu führen. Herr Dr. Wolfskehl bemerkt in seinem Testamente, daß Fermat (siehe z. B. Œuvres de Fermat Paris 1891 t. I pg. 291 observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind. Dieser Fermatsche Satz ist entweder im Sinne Fermats allgemein oder in Ergänzung der Untersuchungen von Kummer (Crelles Journal 40, S. 130 ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857) für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Über weitere Literatur vergleiche man: Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173 und Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2 Arithmetik und Algebra (1900—1904) I C 4 b, S. 713.

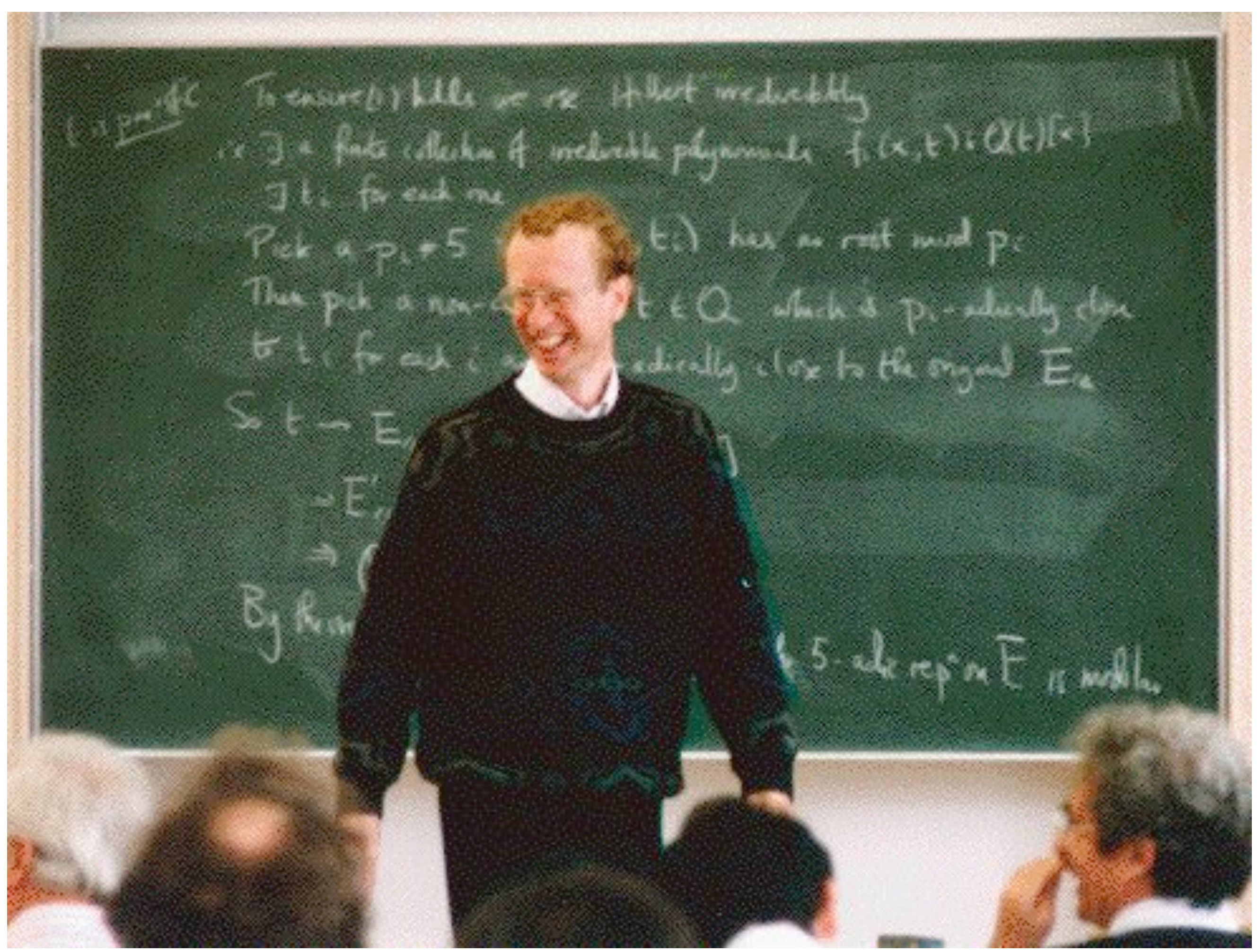
Wegen des Preises zog dieses elementar formulierte
(aber wohl nicht elementar lösbare) Problem
neben vielen Mathematikern auch ungezählte Laien ("Fermatisten") an,
die wohl wegen der Schwierigkeit des Problems keine Chance hatten.
So wurde der Fermatsche Satz quasi zum Grab des verunglückten Aussenseiters.

Drei Bemerkungen zum Beweis des “Fermatschen Theorems”

II. Zu Andrew Wiles’ erstem Anlauf.

In Wiles’ erstem “Beweis”, der vor 15 Jahren in Cambridge die Sektkorken knallen liess, war eine wesentliche Lücke.
Es war also kein Beweis.
Warum glaubten trotzdem die ganze anwesende *crème de la crème* der internationalen Zahlentheorie, er hätte einen Beweis ?

Weil Wiles schon ein sehr erfolgreicher Mathematiker war.



Weil der “Beweis” insgesamt ebenso überzeugend wie raffiniert aussah, und die neuesten Theorien benutzte.

Der Kollege (Matthias Flach, Pasadena), der über die Lücke mehr nachgedacht hatte als alle anderen, war nicht in Cambridge dabei.

Erst Wochen später begann die Kritik der Experten.

Drei Bemerkungen zum Beweis des “Fermatschen Theorems”

III. Seit Wiles’ zweitem Beweis.

Sehr viel technischer Fortschritt in der
Arithmetik elliptischer Kurven und der Theorie der Galoisdarstellungen.
Dieser Fortschritt wird von den Zahlentheoretikern auch täglich genutzt.

Aber bisher gibt es keinen neuen, andersartigen Beweis von Fermat.

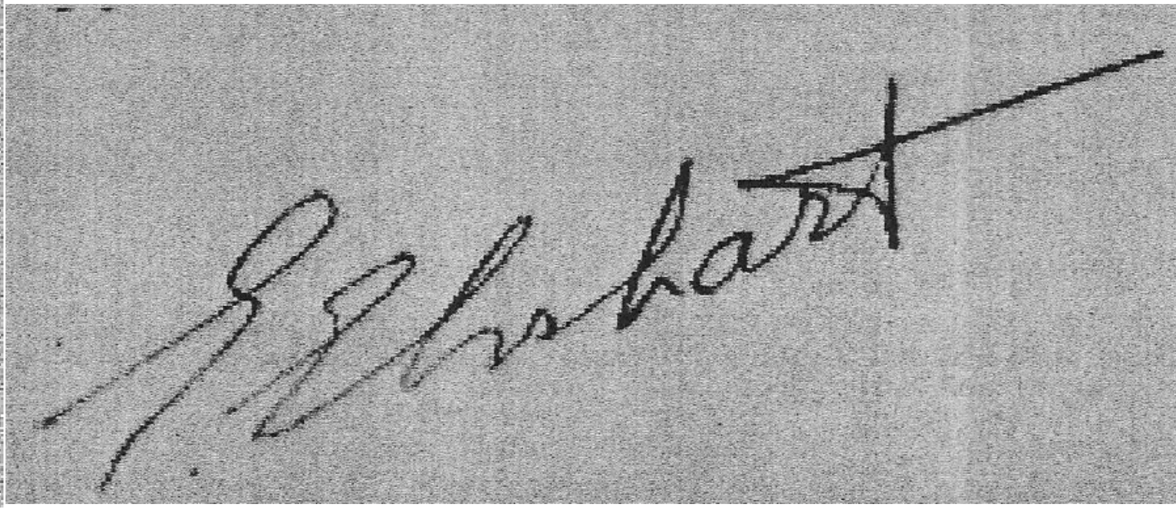
(Man kann sich darüber wundern.)

Lehrer als (relative)
akademische Aussenseiter

Ein Beispiel aus Strassburg :

Eugène Ehrhart
(1906 - 2000)

Prix de l'Académie des Sciences
1959 & 1974



Ein Vorgeschmack auf die Ehrhart Polynome, Teil I

1. Die Anzahl der Möglichkeiten, n euros unter Benutzung von 10-, 20-, 50-Cent- und 1-Eurostücken zu zahlen, ist:

$$P_1(n) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Und wenn jede Sorte von Münzen mindestens einmal benutzt werden muss:

$$Q_1(n) = \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)(5n-6) = -P_1(-n) = (-1)^3\, P_1(-n).$$

Beweis: Übung!

Ein Vorgeschmack auf Ehrhart Polynome, Forts.

2. Ein **magisches Quadrat vom Typ** $(3, n)$ ist ein 3×3 Arrangement von Zahlen, so dass jede Zeilen- und jede Spaltensumme gleich n ist. Beispiel:

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix} \qquad \text{ist vom Typ} \quad (3, 15)$$

Die Anzahl der magischen Quadrate vom Typ $(3, n)$ ist

$$P_2(n) = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4).$$

Und wenn alle Einträge des magischen Quadrats echt grösser Null sein sollen:

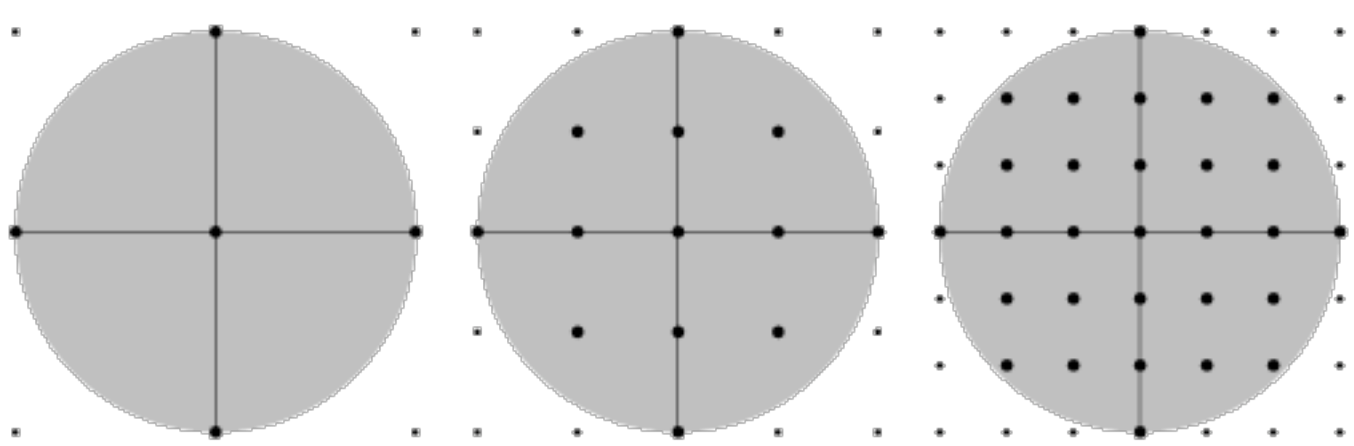
$$Q_2(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4) = P_2(-n) = (-1)^4\, P_2(n).$$

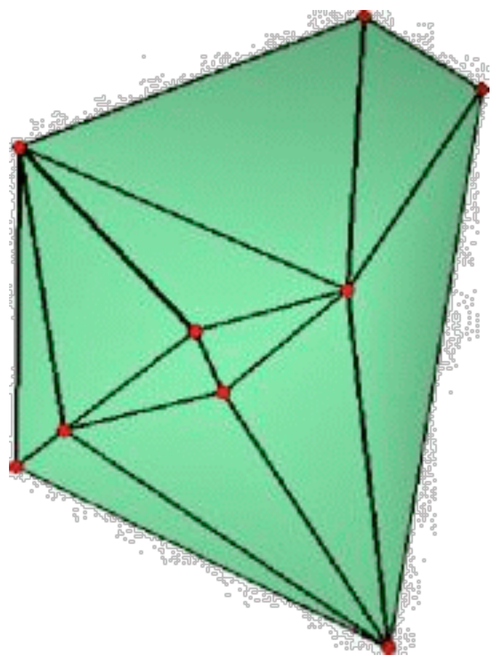
(Schwer!)

Ein Vorgeschmack auf Ehrhart Polynome, Ende

Eugène Ehrhart hat diese Paare von zueinander "reziproken" Polynomen auf vielfach anwendbare Situationen verallgemeinert und insbesondere ihre Koeffizienten studiert.

Stichwort: Zähle ganze Punkte in Polytopen (oder in deren Inneren).





Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I[1])

Polyèdres et réseaux

Par *E. Ehrhart* à Strasbourg

Introduction

Relation de récurrence eulérienne. Considérons le produit

$$\Pi(u) = (1 - u^{a_1})(1 - u^{a_2}) \cdots (1 - u^{a_s}), \tag{1}$$

où les a sont des entiers positifs. Si dans ce produit effectué on remplace chaque puissance u^r par u_{n-r}, on obtient une relation de récurrence linéaire et homogène, que nous écrivons $\{\Pi(u)\} = 0$ et que nous appelons relation de récurrence eulérienne. La solution générale d'une telle relation s'appelle *polynôme mixte*. On sait qu'elle est déterminée par quelques valeurs initiales, qu'elle est fournie par une fraction rationnelle génératrice $\frac{f(t)}{\pi(t)} = \sum_0^\infty u_n t^n$, et qu'elle se réduit à un vrai polynôme en n de degré k, si $\Pi(t) = (1-t)^{k+1}$.

Euler a montré sans peine que le *compteur* C_n du système $\sum a_i X_i = n$, $X_i \geqq 0$, c'est-à-dire le nombre de ses solutions entières, est un polynôme mixte de produit caractéristique $\Pi(1 - t^{a_i})$. De nombreux auteurs, dont Hermite, Sylvester, Laguerre, Cayley et Weihrauch, ont étudié ce système, que nous appelons *eulérien*. Leur point de départ est toujours la méthode d'Euler, et aucun n'a examiné les systèmes plus généraux que nous étudierons[1a]).

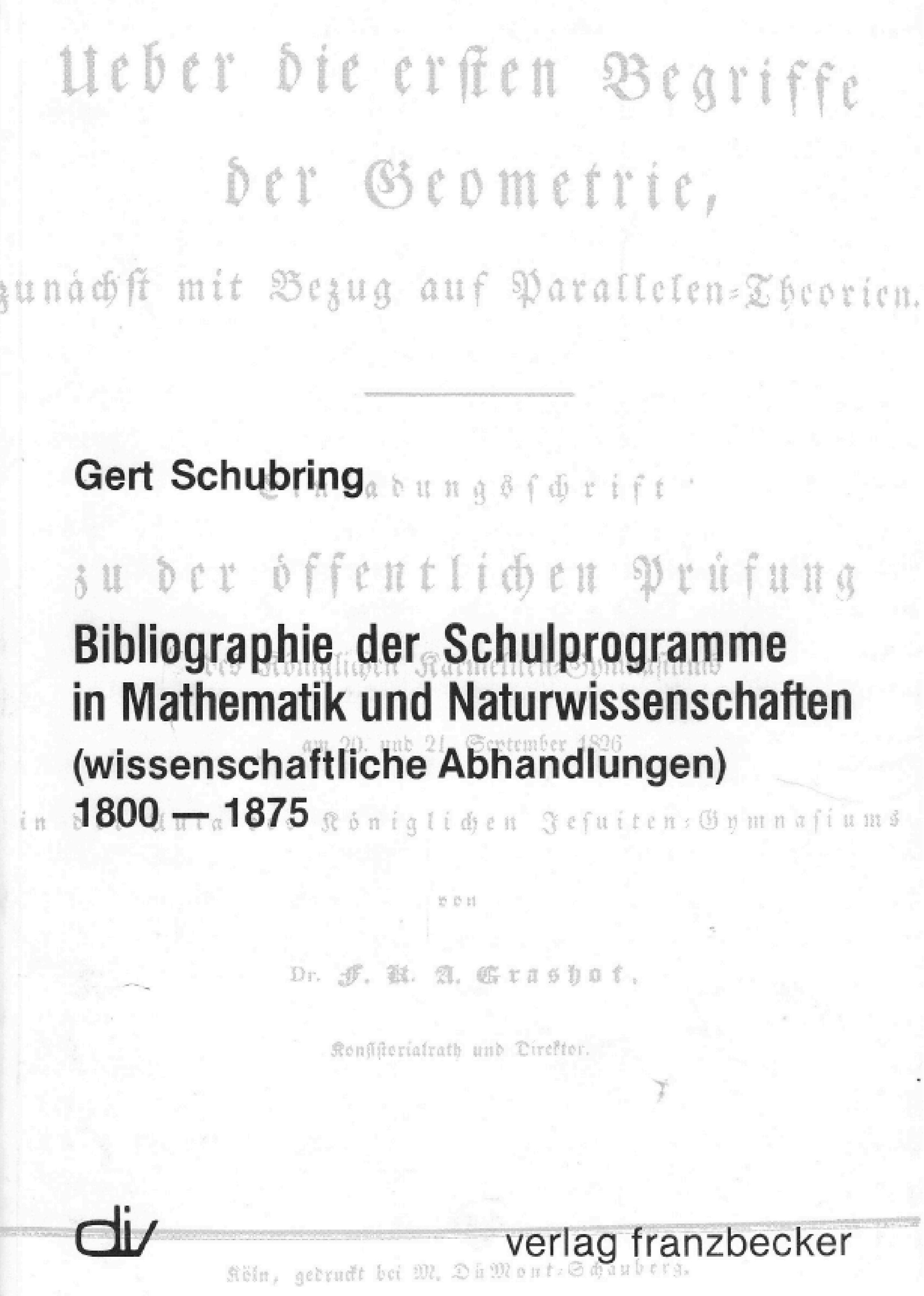
Systèmes eulériens généraux. Ces systèmes, formés d'équations et d'inéquations linéaires qui dépendent d'un paramètre n, entier positif, sont de trois classes, homothétiques, bordés et affines. (Pour leurs définitions, je renvoie aux chapitres respectifs.) Je montre que *le compteur C_n de chacun de ces systèmes est un polynôme mixte en n.* En outre, je donne des *méthodes de réduction de la relation de récurrence*, qui simplifient beaucoup la recherche effective de C_n. Ces systèmes, bien plus généraux que l'eulérien, n'en constituent en aucune manière une généralisation triviale, et les difficultés d'une autre nature nécessitent une méthode nouvelle. Cette méthode est géométrique. Un

[1]) Thèse de doctorat d'état, soutenue à Grenoble en juin 1964.

[1a]) A ma connaissance le seul auteur qui ait envisagé systématiquement des *systèmes formés d'équations et d'inéquations diophantiennes linéaires* est P. A. Mac Mahon, mais ces systèmes, étudiés algébriquement, ne sont pas du genre de ceux que j'étudie; en particulier leurs inéquations sont de la forme $\sum a_i X_i \geqq 0$ (pas de terme constant) et se réduisent même le plus souvent à $X_i \geqq X_j$. (Combinatory Analysis, 1916, T. II, p. 91 à 150, 182 à 188 et 247 à 257.)

E. Ehrharts Habilitationsschrift gedruckt in Crelles Journal 1967

Enthält
68 Arbeiten zur
Mathematik von
Eugène Ehrhart


Gert Schubring

Bibliographie der Schulprogramme
in Mathematik und Naturwissenschaften
(wissenschaftliche Abhandlungen)
1800 — 1875

verlag franzbecker

Ueber die ersten Begriffe
der Geometrie,
zunächst mit Bezug auf Parallelen-Theorien.

zu der öffentlichen Prüfung

am 20. und 21. September 1826

von

Dr. F. K. A. Grashof,

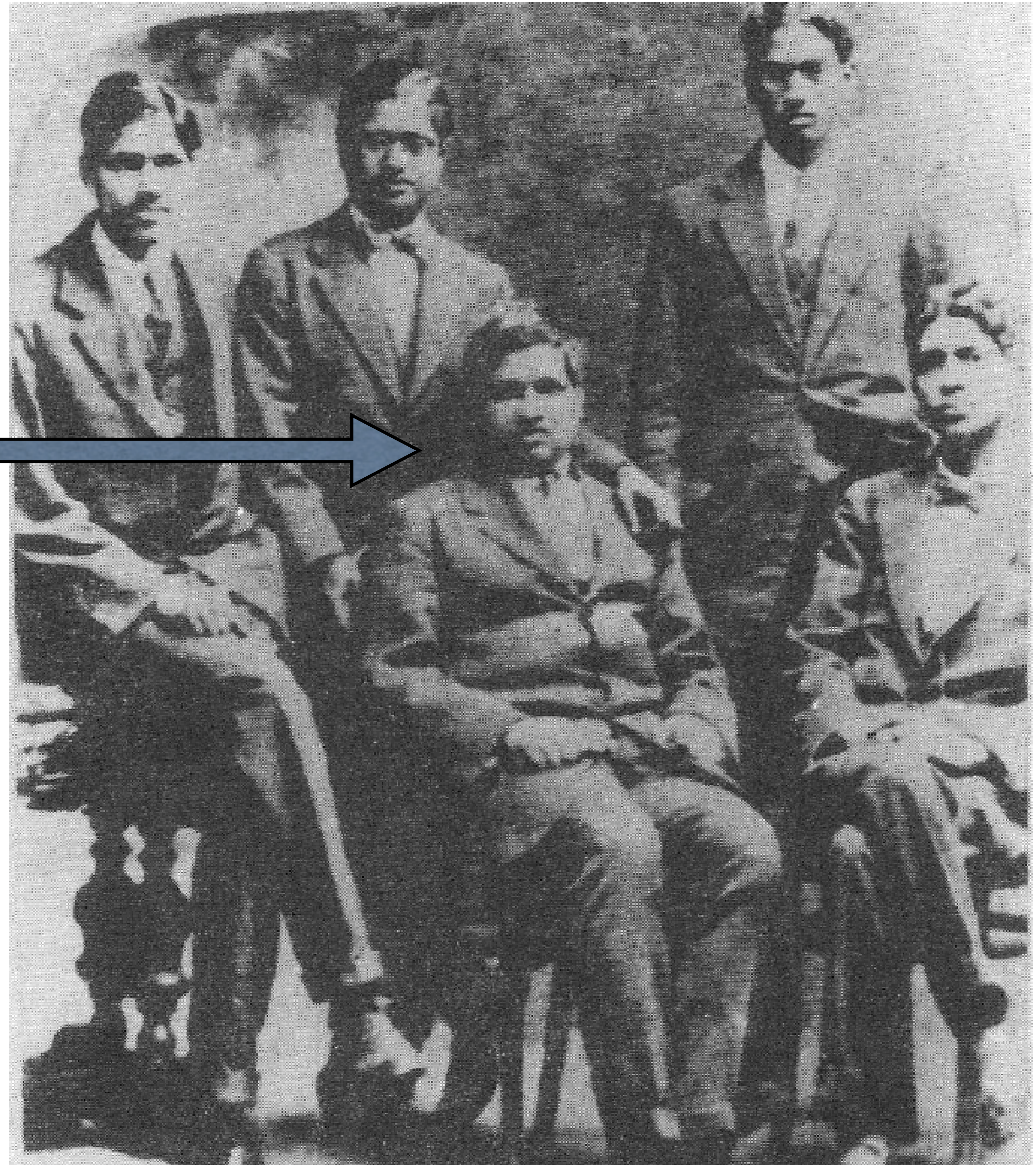
Konsistorialrath und Direktor.

Köln, gedruckt bei M. DuMont-Schauberg.

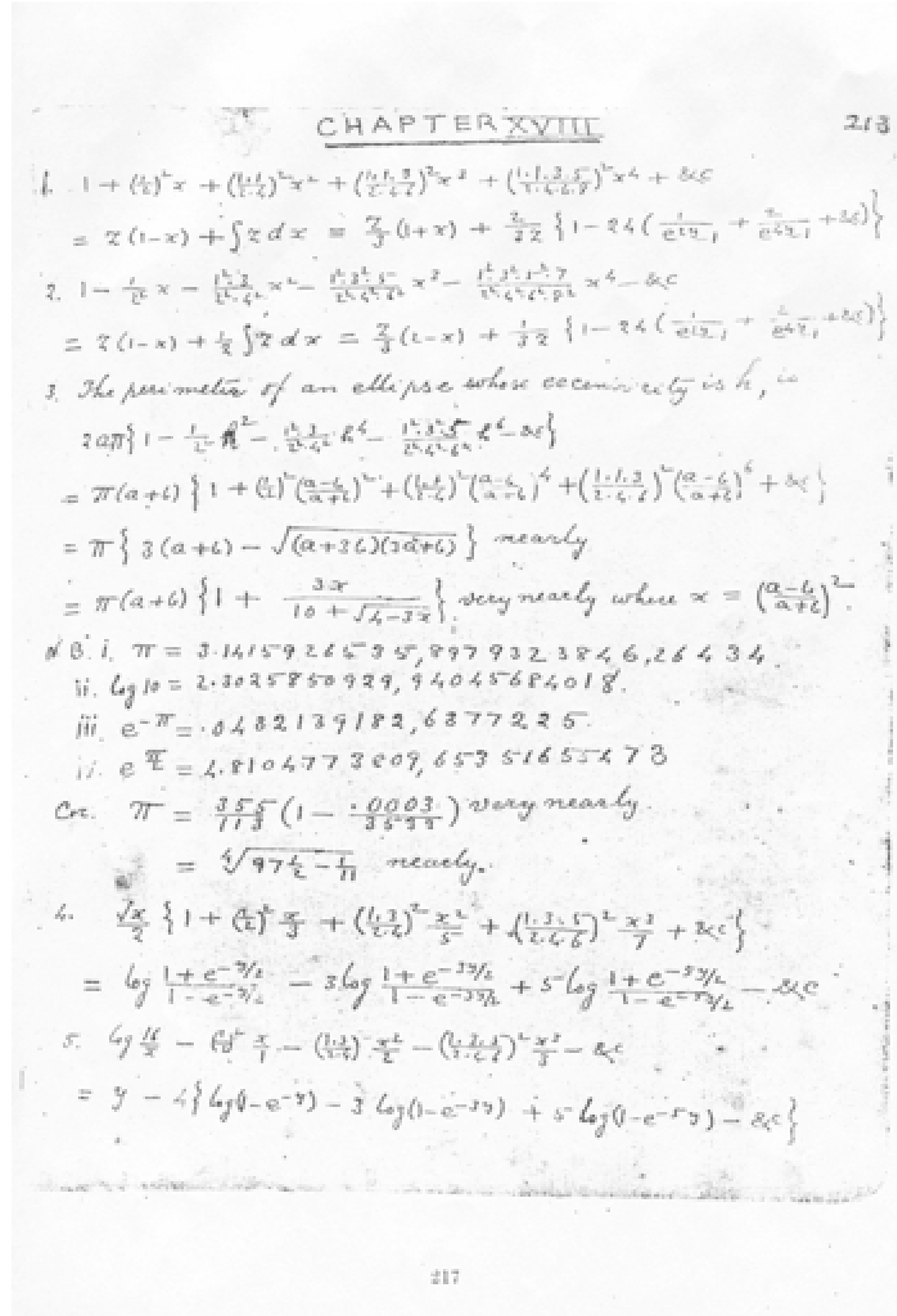
Programmschriften der Schulmeister des 19. Jahrhunderts

Diese Bibliographie von 1986 erfasst insgesamt **3094** wissenschaftliche Abhandlungen von Lehrern aus der Mathematik oder den Naturwissenschaften

Ein genialer
Aussenseiter :
[Srinivasa]
Ramanujan
1887 - 1920



- Wächst in Erode, Tamil Nadu, auf in armer obwohl Brahmanischer Familie (höchste Kaste, Vegetarier)
- Angeregt durch Bücher findet er **Formeln über Formeln**, lernt aber nur einen Bruchteil der Mathematik des 19. Jahrhunderts
- Seine ausschliessliche Konzentration auf die Mathematik führt dazu, dass er 1905 vom College in Kumbakonam fliegt (das als sehr gut galt) und als Angestellter im Hafen von Madras arbeitet
- 1909 Heirat mit der neunjährigen Janaki Ammal [gestorben in Chennai 1994]; R. entwickelt seltene Hodenkrankheit
- 1912-1913 Kontakt mit G.H. Hardy in Cambridge, England; dieser holt ihn kurz vor dem I. Weltkrieg zu sich, sobald Ramanujan seine religiösen Widerstände gegen die Reise überwinden kann
- U.a. wohl in Folge seiner schlechten Ernährung während des Krieges: Krankheit und Rückkehr nach Kumbakonam 1919; wenig später Tod.


CHAPTER XVIII 213

3. The perimeter of an ellipse whose eccentricity is k, is

$= \pi\{3(a+b) - \sqrt{(a+3b)(3a+b)}\}$ nearly

$= \pi(a+b)\left\{1 + \frac{3x}{10+\sqrt{4-3x}}\right\}$ very nearly where $x = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$.

N.B. i. $\pi = 3.14159\,26535,89793\,23846,26434$.

ii. $\log 10 = 2.30258\,50929,94045\,68401\,8$.

iii. $e^{-\pi} = .04321\,39182,63772\,25$.

Cr. $\pi = \frac{355}{113}\left(1 - \frac{.0003}{3533}\right)$ very nearly

$= \sqrt[4]{97\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{11}}$ nearly.

217

Unmöglich, Ramanujans tausende von Identitäten im kurzen Überblick vorzustellen.

Partitionen waren ein Teil seiner Forschung.

6+3+3+2+1=15

o o o o o o

o o o

o o o

o o

o

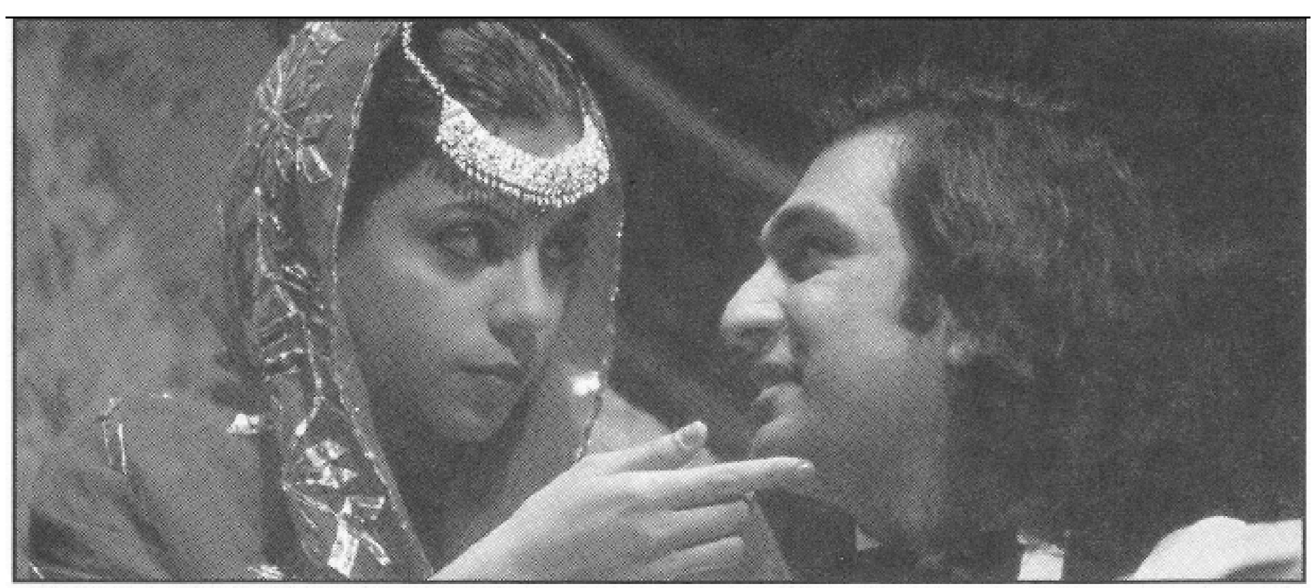
5+4+3+1+1+1=15

Ramanujan hat als erster Teilbarkeitsaussagen für die Anzahl der Partitionen p(N) *für Serien von Zahlen* N *aufgestellt.*

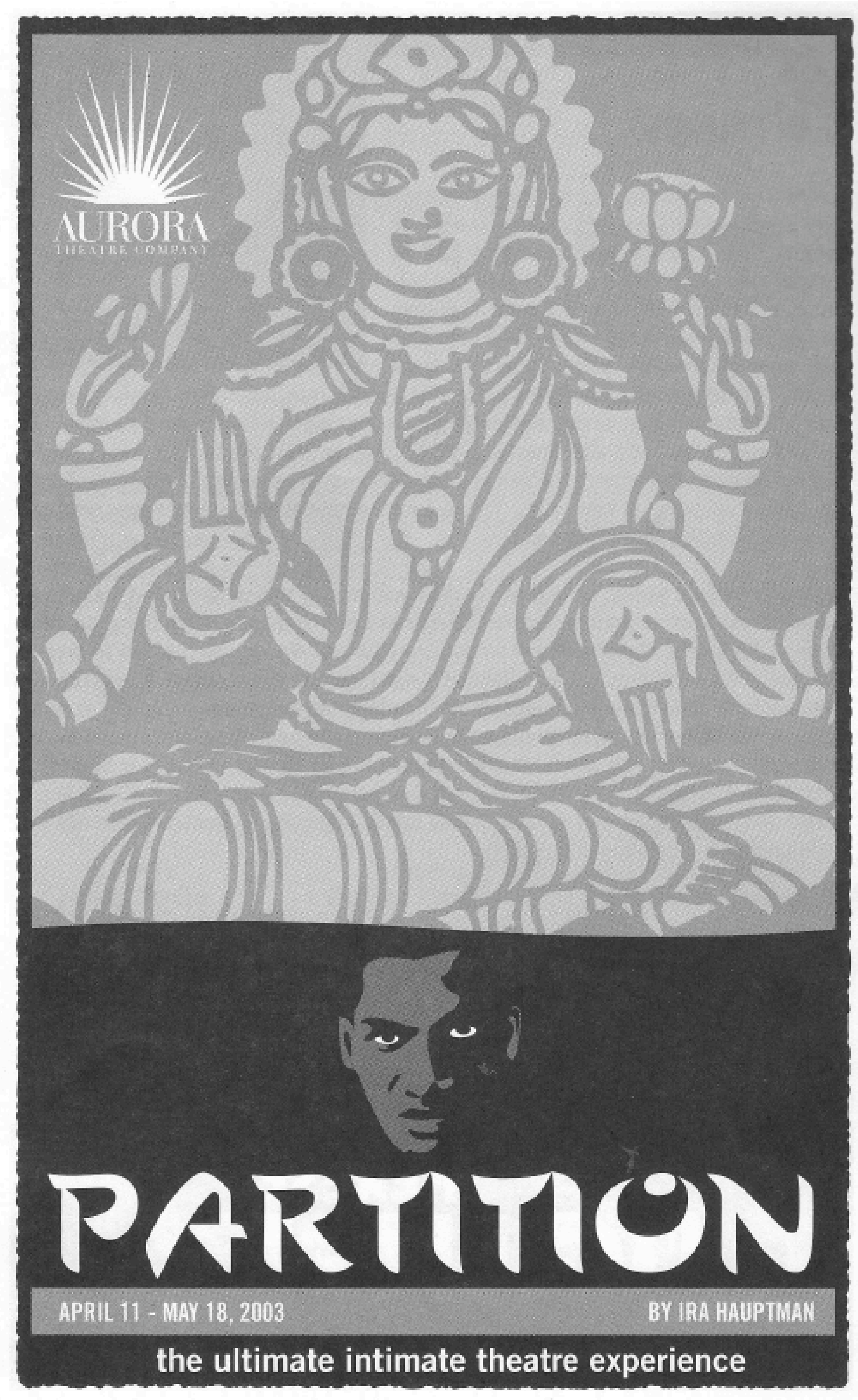
$$p(5m+4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$p(7m+5) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$$



Rachel Rajput and Rahul Gupta in *Partition*. Photo by David Allen.



I never knew that math was supposed to be difficult.

Ramanujans Ernte von Identitäten für analytische Funktionen war erfolgreich und teilweise zukunftsweisend, obwohl er damit sozusagen nicht zeitgemäß war :

Während der *mainstream* der Mathematik damals eine starke Tendenz zur begrifflichen Fassung von Problemen zeigte und z.B. Räume von analytischen Funktionen ins Visier nahm, arbeitete Ramanujan mit expliziten Formeln für mehr oder weniger spezielle Funktionen. Trotzdem hatten einiger seiner Entdeckungen auf den Lauf der Mathematik im 20. Jahrhundert wichtige Auswirkungen.

Nur ein Beispiel : Ramanujan's Berechnung singulärer *j*-Werte

Ramanujan berechnet insbes. für $n = \mathbf{3}, \mathbf{11}, \mathbf{19}, \mathbf{43}, \mathbf{67}, \mathbf{163}$ den Wert

$$J_n = -\frac{1}{32}\,\gamma_2\Big(\frac{3+\sqrt{-n}}{2}\Big)$$

wobei

$$\gamma_2(\tau) = \sqrt[3]{j(\tau)}$$

Wähle die Kubikwurzel, die für rein imaginäre *j* reelle Werte annimmt.

mit

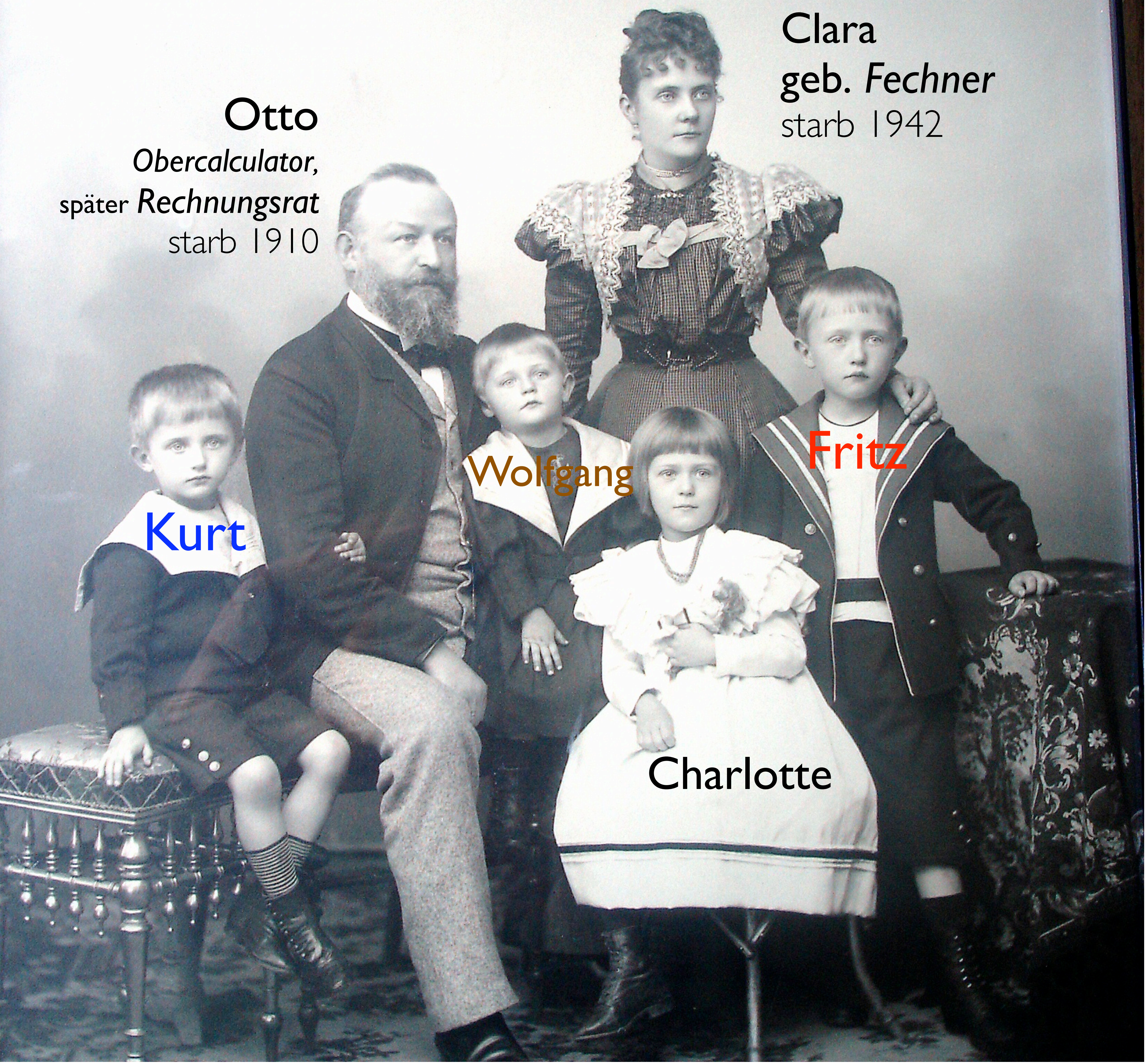
$$j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}, \quad \Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2$$

und

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^4}, \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^6}$$

In der Tat sind **diese** Werte J_n **ganze Zahlen.**

$$J_3 = 0, J_{11} = 1, J_{19} = 3, J_{43} = 30, J_{67} = 165, J_{163} = 20010.$$



Die Familie Heegner ~ 1900

Kurt-Heegner-Projekt gemeinsame Arbeit mit Hans Opolka (Braunschweig) und Samuel J. Patterson (Göttingen).

Dank an Fritz Heegner, junior, für Fotos und Erinnerungen!

Kurt Heegner, drittes Kind der Familie

- Am 16.12.1893 Kurt Heegner in Berlin geboren
- Die 3 Brüder gehen auf das *Askanische Gymnasium* (*humanistisch*), seinerzeit eines der besten Berliner Gymnasien,1875 gegründet, Hallesche Strasse 22-24.
- Oktober 1913 Abitur
- 1914 - 1917 Student an der Universität Berlin:
  Mathematik (Hermann Amandus Schwarz, Konrad Knopp) &
  Physik (Max Planck, Heinrich Rubens; Experimentaphysik bei Arthur Wehnelt)

Militärdienst erst ab 1917

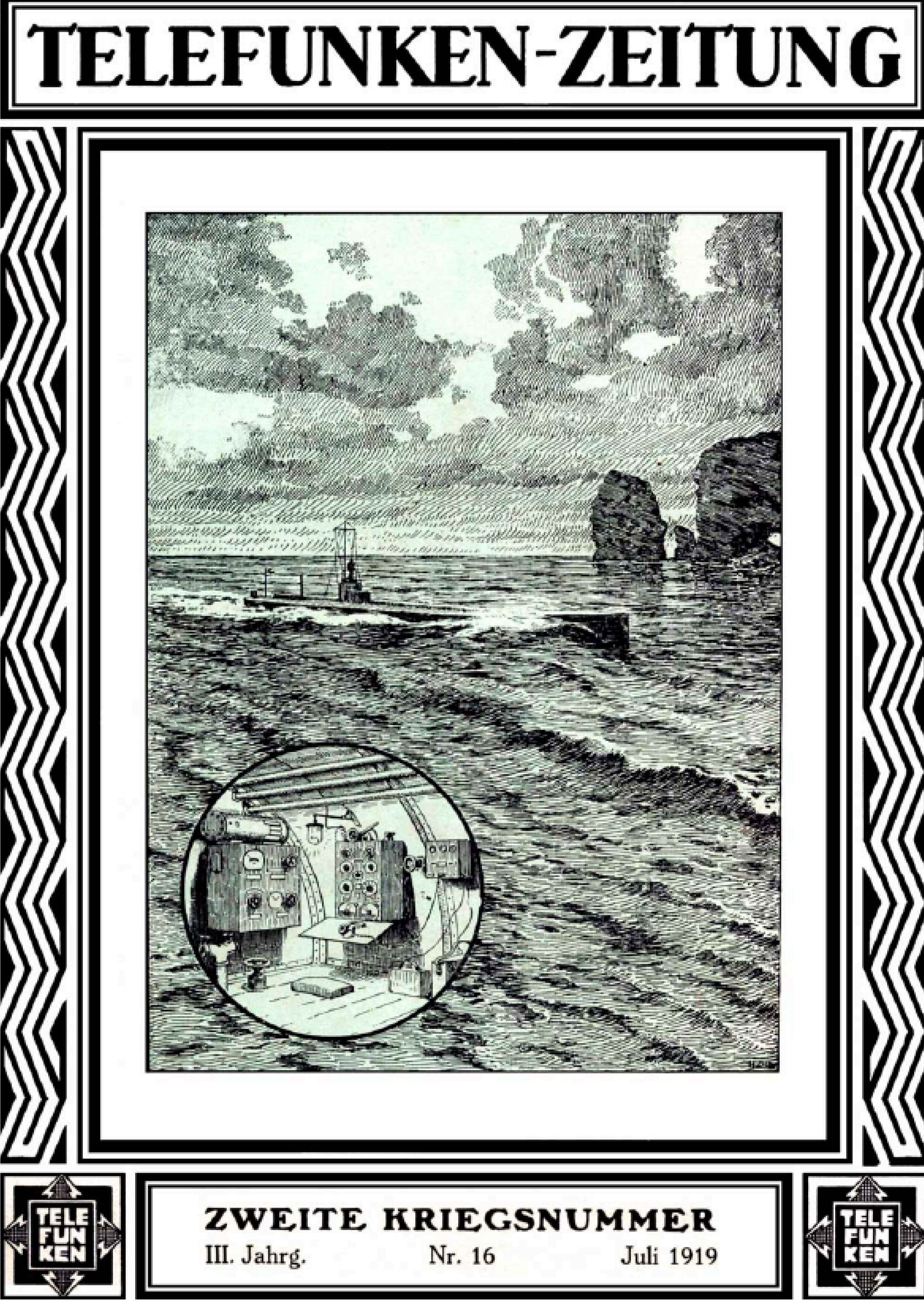
- 11.6.1917 Einberufung : *Grenadier* im *Kaiser-Franz-Regiment, Ersatzbataillon, 2. Kompagnie.*

- 8.7.1917 Antrag auf Eingliederung in meteorologischen Dienst der Luftschifftruppen.

- Kommt aber schliesslich in Abteilung für Radiotechnikunter Leitung von Walter Rogowski*.

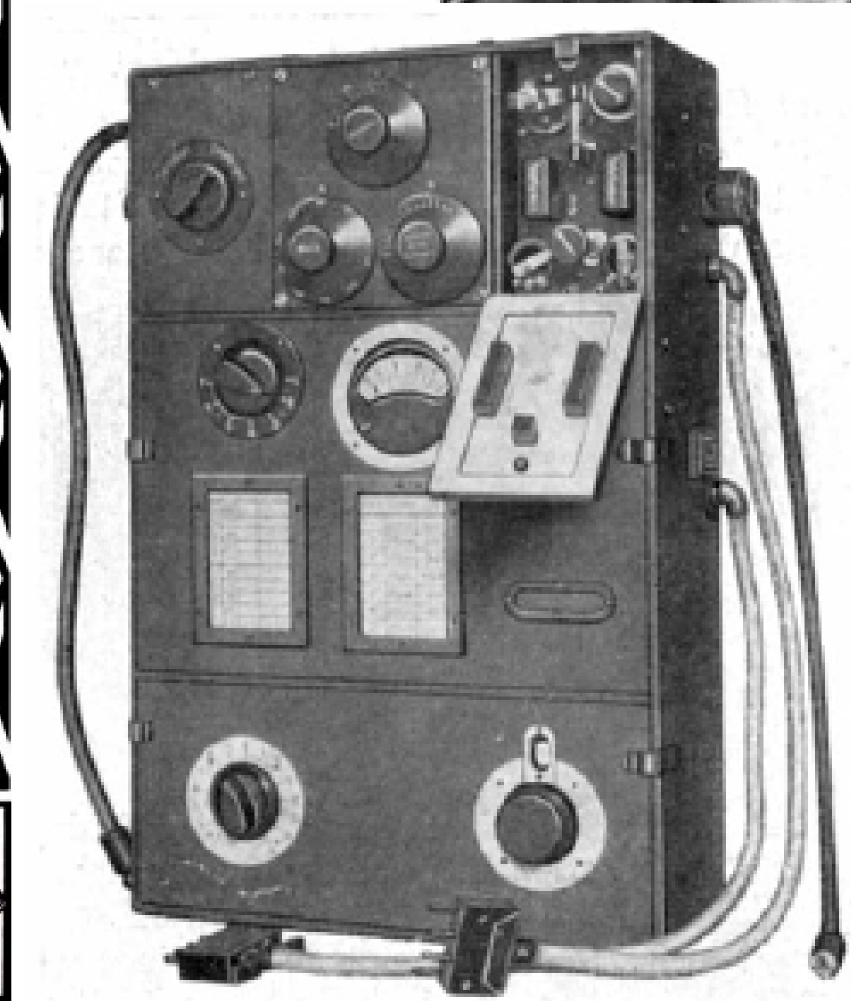
- Heegner setzt seine Arbeit nach Kriegsende in den verlassenen Werkstätten fort; daraus wird seine Doktorarbeit ......

** 1881-1947, Schüler vonSommerfeld,*
gründete 1913 das Archiv für Elektrotechnik
1919 Professor in Jena
ab 1920 in Aachen.

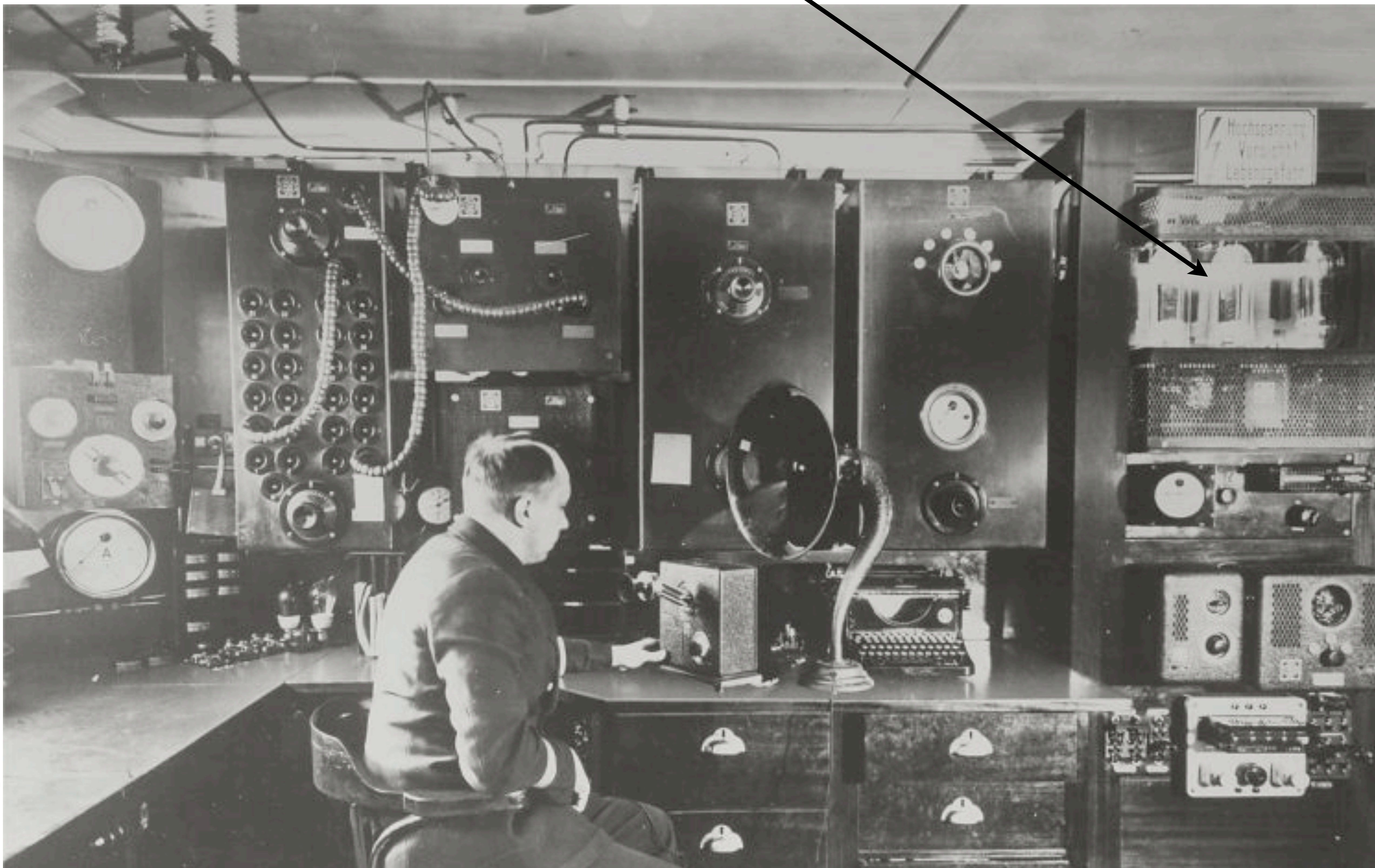


Der Erste Weltkrieg brachte der Entwicklung der Radiotechnik einen grossen Aufschwung

ikrophon für Telephonie



“Zwischenkreisröhrensender” von Telefunken (1922)
in dem Dampfschiff *New York*



TS *New York* mit Röhrensender CP-IV

Heegners Arbeiten zur Radiotechnik (1920-1925)

- *Über den Zwischenkreisröhrensender.** Diss. Jena 1920. Springer Verlag 1920.
- Zwischenkreisröhrensender. *Archiv für Elektrotechnik* 9 (1920)
- Elektrisch und magnetisch gekoppelte, durch Elektronenröhren erregte Schwingungskreise. *Archiv für Elektrotechnik* 11 (1922), 12 (1923)
- Labile Röhrenschwingungen und Schwebungen in gekoppelten Kreisen. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 22 (1923)
- Auftreten von Schwebungen bei rückgekoppelten Schwingungen. *Zeitschrift für Physik* 13, 19, 24 (1923/24)
- Selbsterregungserscheinungen an Schwingungskreisen mit Eisenkernspule. *Zeitschrift für Fernmeldetechnik* 5 (1924)
- Selbsterregungserscheinungen bei Systemen mit gestörter Superposition. *Zeitschrift für Physik* 29 (1924), 33 (1925)

* Die Doktorarbeit enthält auch einige tiefere mathematische Bemerkungen zur Anwendbarkeit elliptischer Integrale ....

Heegners Arbeiten zur Radiotechnik (1927-1938)

- Schwingungserzeugung mittels Elektronenröhrensystemen, welche Selbstinduktion nicht enthalten. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 29 (1927)
- Messungen an piezoelektrischen Kristallen. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 29 (1927)
- Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystems, welches keine Selbstinduktion enthält. *Zeitschrift für Physik* 42 (1927)
- K.H. & Watanabe : Schwingungserzeugung durch Elektronenröhrensysteme, bei welchen die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 34 (1929)
- Schwungradschaltung und Serienschaltung bei selbsterregten, durch Elektronenröhren erzeugten Schwingungen. *Hochfrequenztechnik und Elektroakustik* 40 (1932)
- Kristalloszillator nach Peirce. *Elektronik und Nachrichten-Technik* 10 (1933)
- Gekoppelte selbsterregte elektrische Kreise und Kristalloszillatoren. *Elektronik und Nachrichten-Technik* 15 (1938)

Heegner hielt eine ganze Reihe von Patenten; in der Regel verkaufte er sie an *Telefunken* oder *Loewe*.

DEPATISnet-Startseite | Information | Einführung |

Deutsches Patent- und Markenamt

DEPATISnet

Recherche | IPC

Einsteiger | Experte | Ikofax | Familie | Assistent

> DEPATISnet-Startseite > Recherche > Einsteiger > Trefferliste

Trefferliste

Suchanfrage:

heegner/PA

Zurück zur Recherche

TREFFERLISTE: TREFFER: 4 (GESAMTTREFFER: 4) ANGEZEIGTE TREFFERLISTE HERUNTERLADEN

Nr.	Veröffentlichungs-Nummer ▲	Titel	Anzeige PDF	Familien-Recherche
1	DE000000603006A	[ ] Durch piezoelektrischen Kristallresonator erregter Oszillator	PDF	Suchen
2	DE000000359505A	[ ] Anordnung zur Erzeugung von Kopplungsschwingungen	PDF	Suchen
3	DE000000359504A	[ ] Anordnung zur Schwingungserzeugung	PDF	Suchen
4	GB000000431068A	[ ] Crystal-controlled thermionic valve oscillator	PDF	Suchen

|< < > >| Drucken Zurück zur Recherche

Erfolg und Einsamkeit des Dr. Kurt Heegner

Betrifft: Erfindungsangebot Dr.Heegner - DRP 603 006

Am 31.3.1939 fand um 15^{30} Uhr bei Herrn Dr. Bechmann eine Besprechung mit Herrn Dr. Heegner statt, welche Herr Dr. Bechmann angeregt hatte, um näheres über die Absichten des Herrn Dr. Heegner in Bezug auf das obige Patent und über den Inhalt einer von Herrn Dr. Heegner Ende 1938 eingereichten Zusatzanmeldung zu erfahren.

Herr Dr. Heegner redete unklar und unverständlich wie immer, jedoch konnte man sich, am Schluss der längeren Unterhaltung von seinen Wünschen und Anschauungen folgendes Bild machen:

Herr Dr. Heegner fühlt sich unsicher hinsichtlich der in Aussicht genommenen Regelung betreffend das amerikanische und das britische Patent. Er behauptet, von einer Seite, die er nicht nennen will, insbesondere vor der RCA als einer gänzlich unreellen Firma gewarnt worden zu sein. Er fürchtet, dass Marconi und RCA das Angebot ablehnen und er dann zwar mit Rücksicht auf unser Schreiben vom 15.3.1939 keine Kosten, aber auch keinen Nutzen an den beiden Auslandsschutzrechten hätte, insbesondere wo er selbst nicht weiss,

Detektiv-Auskunft über Kurt Heegner

Büro: Berlin, den 22.1.41

22.1.1941

Ihr Akt.-Z.: - - -

Wir erteilen Ihnen diese Auskunft gemäß unseren Geschäftsbedingungen unter Ausschluß jeder Haftung auf Grund unseres betriebsüblichen Erkundigungsdienstes. Die Auskunft ist nur für den Anfragenden bestimmt, bleibt Eigentum der Auskunftei und ist auf Verlangen zurückzugeben.

Auskunft über:

Streng vertraulich.

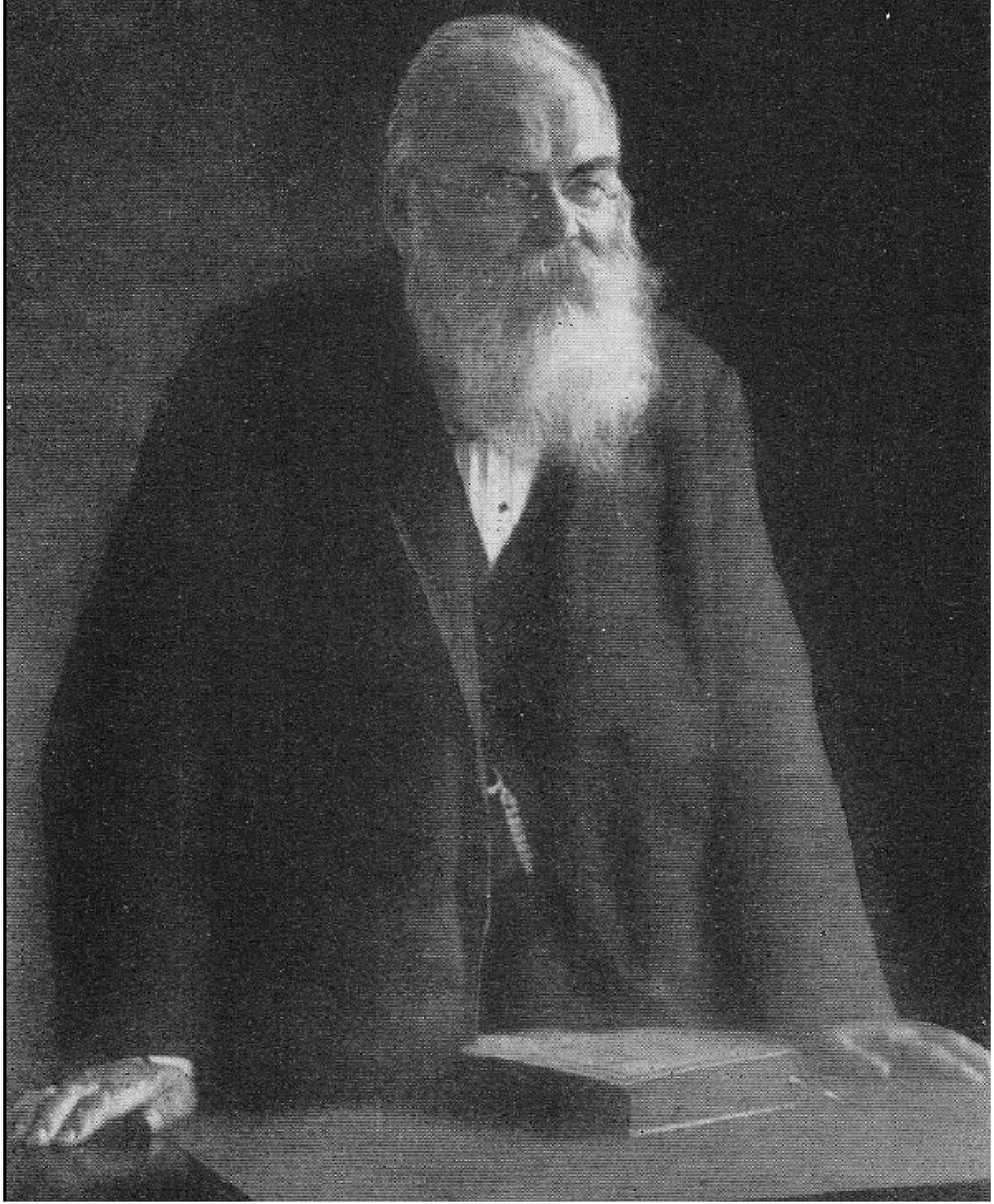
Dr.phil. Kurt Heegner .... Berlin-Steglitz
- Privatgelehrter - Elisenstrasse 7.

Dr. Heegner, Ende der 1890er Jahre geboren, ledig, hat Philosophie studiert und beschäftigt sich hauptsächlich mit wissenschaftlichen Fragen auf dem Gebiete der Mathematik. Eine Tätigkeit im Auftrage anderer übt Dr. Heegner nicht aus. Er ist vielmehr persönlicher Liebhaber seiner Wissenschaft und arbeitet als Privatgelehrter.

Elisenstr.7 wohnt Dr.Heegner bei seiner Mutter, Frau Klara Heegner. Diese ist Witwe eines verstorbenen Reichsbeamten und erhält eine gute Pension. Es wird auch angenommen, dass Frau Heegner etwas Vermögen besitzt. Sie hat eine Wohnung von 4 Zimmern gegen monatlich etwa 120.-RM in Benutzung.

Die Verhältnisse werden als geordnet bezeichnet. Dr.Heegner ist anspruchslos und lebt zurückgezogen. Bei nennenswerten Krediten wird empfohlen, Frau Klara Heegner mitzuverpflichten.

1 R124-22.1./22.1.41 .... K58



Hermann Amandus
SCHWARZ
(1843-1921)

ex-Schüler von Weierstrass

Schwiegersohn Kummers

Prof. in Berlin seit 1892

Hatte den grössten Einfluss
auf den Studenten
Heegner 1914-1917.

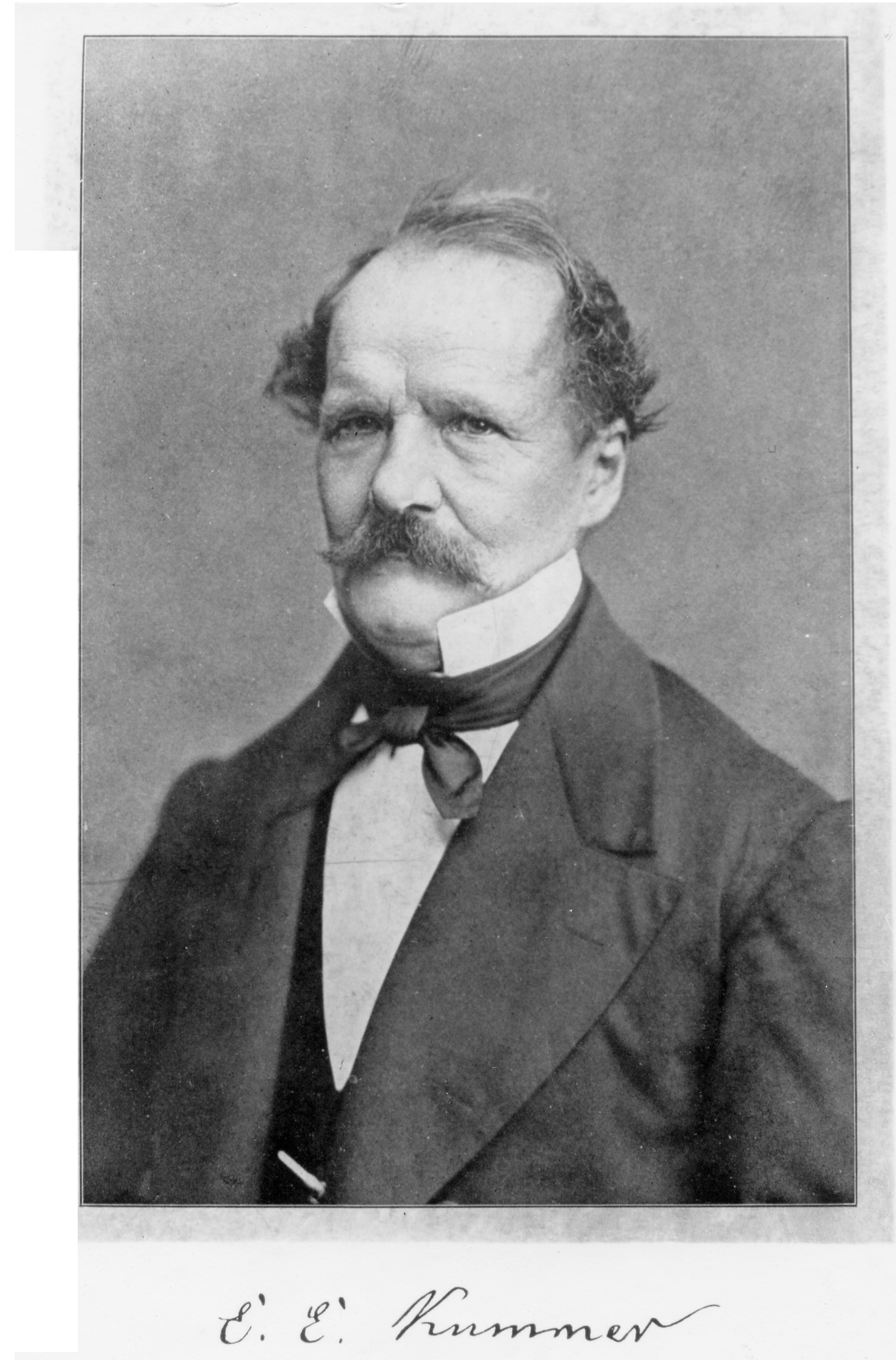
H.A. Schwarz schlug seinen Hörern vor, eine Arbeit Kummers zu verallgemeinern über “rationale Vierecke” (Crelles Journal 1848)

1.

Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind.

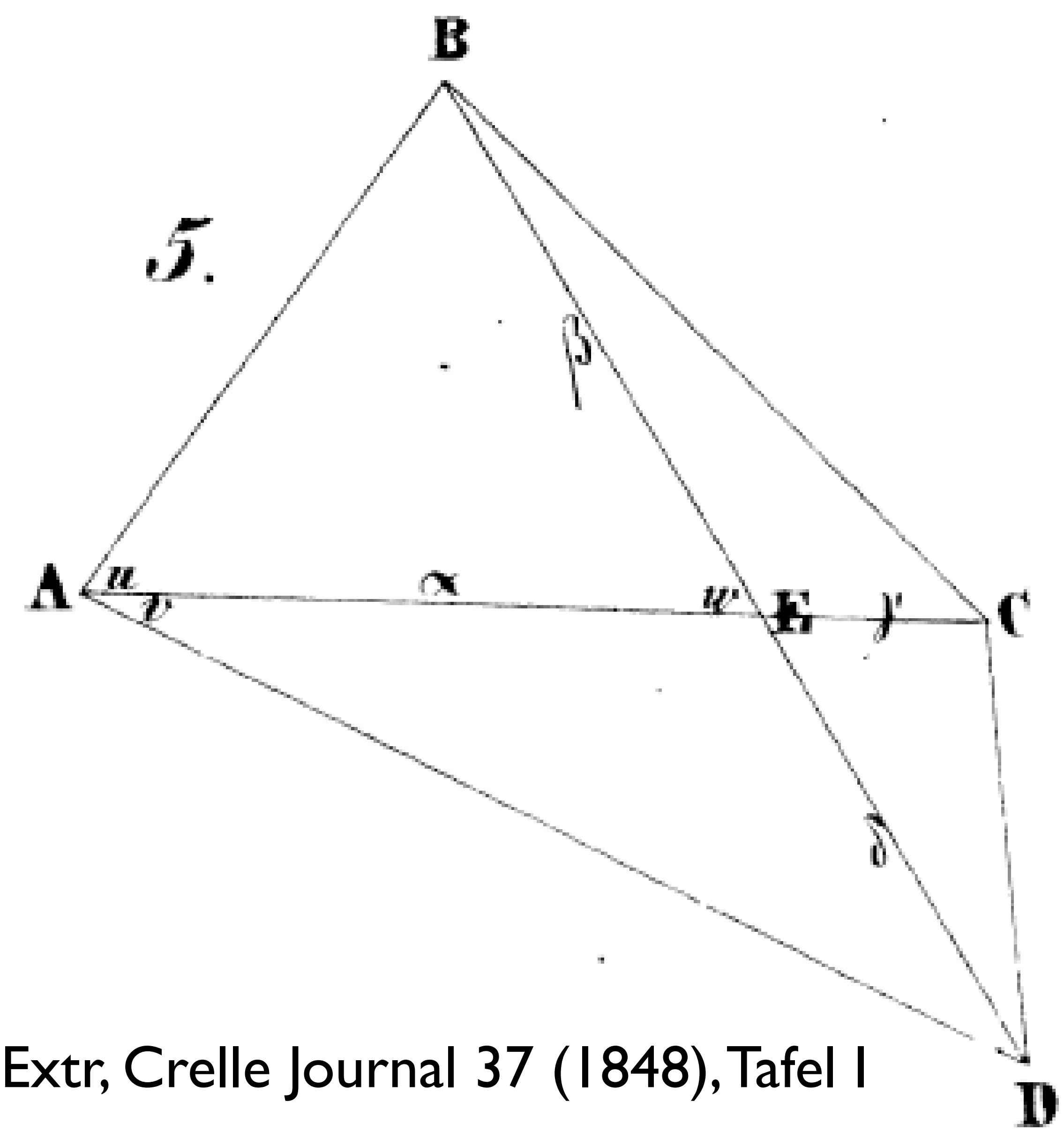
(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

Die Aufgabe: Vierecke zu bilden, deren Seiten und Diagonalen sich durch rationale Zahlen ausdrücken lassen, findet sich schon in den Werken der Inder, namentlich des *Brahmegupta* behandelt, welcher nach *Colebrooke's* Annahme etwa sechs hundert Jahre nach Christi Geburt gelebt hat. Die hierher gehörenden Sätze des Indischen Mathematikers haben ein sehr mysteriöses Ansehen, so dafs ihr wahrer Sinn nur schwer zu erkennen ist, welchen jedoch *Chasles* in der 12ten Note zu seiner Geschichte der Geometrie glücklich enträthselt hat. Es finden sich daselbst auch über den ganzen Abschnitt von den ebenen Figuren viele sehr schätzenswerthe Aufklärungen; die *Methode* indessen, von welcher *Brahmegupta* Gebrauch gemacht hat, um zu den erwähnten Sätzen über das Viereck zu gelangen, scheint dieser geistvolle Geometer nicht genau erkannt zu haben. Wir wollen hier eine kurze Auseinandersetzung derselben geben.



Das von Kummer behandelte Problem

Alle (konvexen) Vierecke zu parametrisieren, deren Seiten und Diagonalen rational sind.



Extr, Crelle Journal 37 (1848), Tafel I

Erster Satz Kummers :
Dann sind auch die vier Diagonal-abschnitte α, β,γ,δ *rational*.

Also analysiert Kummer die enhaltenen rationalen Dreiecke, z.B. AEB, und nennt *c* den Consinus (ebenfalls rational !) des Winkels *w*.

Indem er α,γ,c als rationale Parameter nimmt, übersetzt Kummer das Problem in das Auffinden rationaler Punkte auf der elliptischen Kurve :

$$y^2 = \{\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha(1-c^2)\}^2 + 4(1-c^2)\gamma^2 x^2$$

Rationale Vierecke und Tetraeder und ihre Beziehung zu den elliptischen und hyperelliptischen Funktionen und Modulfunktionen

Von Kurt Heegner in Berlin

Unveröffentlichtes Manuskript von Kurt Heegner (~ 1930 ?)

I. Kummersche und Weddlesche Fläche: symmetrische Permutationsgruppen.

Mit der Aufgabe, die algebraischen Beziehungen der Elementargeometrie durch rationale Zahlwerte zu erfüllen, haben sich die Mathematiker von Alters her beschäftigt. In den arithmetischen Schriften Eulers finden sich verschiedene Arbeiten dieser Art. Die allgemeine Aufgabe, Vierecke zu finden, deren Seiten und Diagonalen rationale Masszahlen haben (Problem der "rationalen Vierecke"), ist von E.E. Kummer behandelt worden [1]. H.A. Schwarz berichtete bei seiner Lehrtätigkeit am Berliner mathematischen Seminar davon, dass Kummer seinen Schülern die Aufgabe gestellt hat, Tetraeder mit rationalen Masszahlen der Kantenlängen und des Volumens zu finden (Problem der "rationalen Tetraeder"). H.A. Schwarz hat auf das Studium solcher Aufgaben grossen Wert gelegt und die Mitglieder des Berliner Seminars fortgesetzt ermuntert, sich mit diesen Aufgaben zu beschäftigen. Arbeiten von F. Neiss [2] und O. Schulz [3] legen hiervon Zeugnis ab. Im besonderen enthält

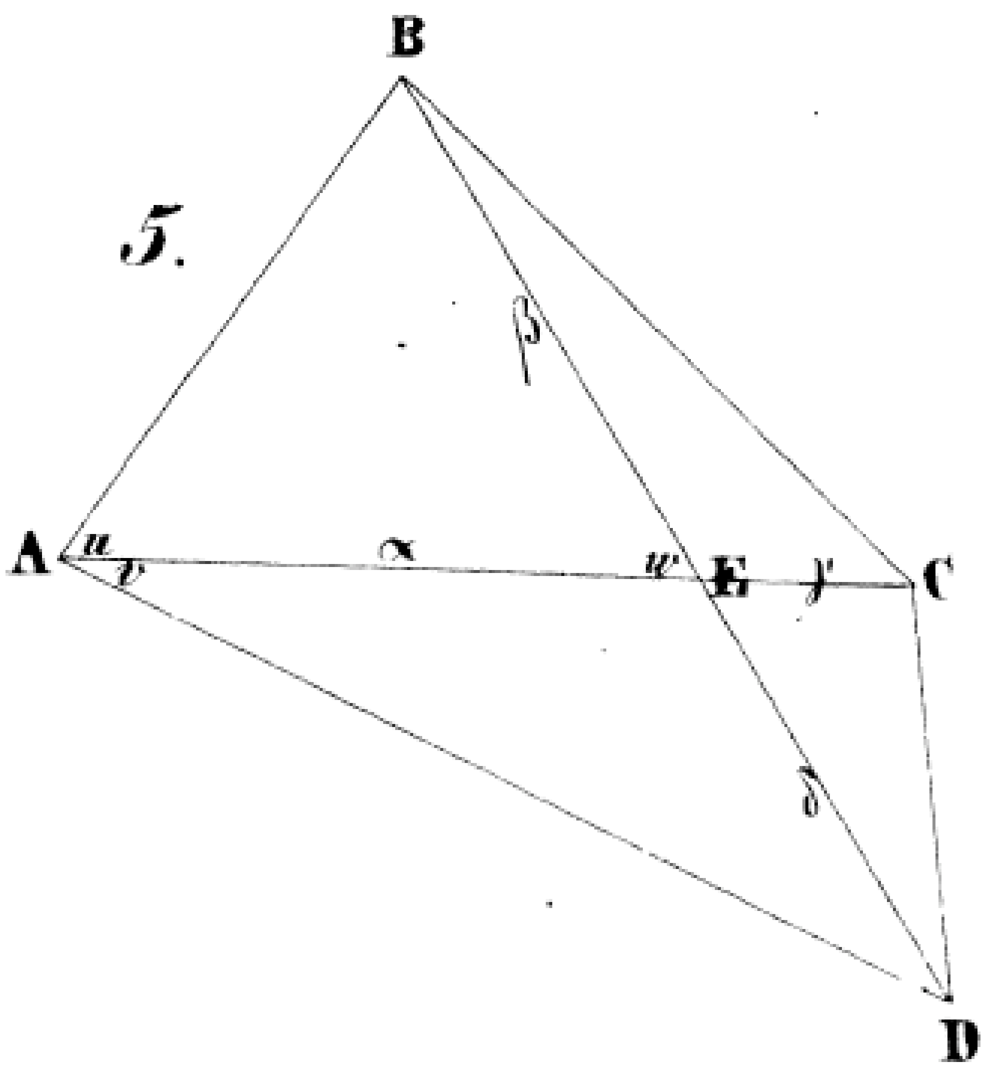
… Heegner erinnert sich

> Problems bis zum Jahre 1914. Ich selbst fiel H.A. Schwarz in den Kriegsjahren 1915/16 dadurch auf, dass ich bei der Behandlung dieser Aufgaben geeignete rechtwinklige Koordinaten einführte. Diese Untersuchungen haben mir mannigfache Anregung zu anderen Arbeiten gegeben. In grösseren Zeitabständen bin ich jedoch zu diesen Aufgaben immer wieder zurückgekehrt und habe sie

Andere Studenten von H.A. Schwarz damals :

- 2 Bücher von Otto Schulz (1914)
- Friedrich Neiss, Leipzig Diss. 1914 : *Rationale Dreiecke, Vierecke und Tetraeder*

Bei Schulz,Neiss, sowie in einem Manuskript von Heegner, das Opolka, Patterson und ich veröffentlichen werden, wird Kummers Skizze "5." als plattgedrückter Tetraeder interpretiert.



Das Volumen eines Tetraeders mit Abständen *d* zwischen den Eckpunkten 1,2,3,4 wird durch die **Formel von Cayley - Menger** gegeben, die also in Heegners Fall =0 zu setzen ist :

$$288 \cdot V^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Festhalten gewisser *d*-Parameter erhält Heegner eine algebraische Fläche, welche Quotient des Produktes zweier elliptischer Kurven ist und die Heegner analysiert ....

Diese Art Problemstellung, in der geometrisch-diophantische Fragen mit elliptischen, abelschen, modularen Funktionen in Verbindung gebracht werden, ist für Kurt Heegners persönliches Forschungsprogramm charakteristisch.

Geometrische Arithmetik

Kurt Heegner

Die vorliegende Arbeit enthält die wunderbaren Prinzipien, welche zur allgemeinen Auflösung der Kummerschen Aufgaben führten, alle Vierecke mit rationalen Seiten und rationalen Diagonalen und alle Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Volumen zu bestimmen. Wir werden diese rationalen Gebilde analytisch darstellen und geben als grundlegenden Gegenstand der geometrischen Arithmetik die Aufgabe an, n Punkte von rationalen Koordinaten und rationaler Entfernung zu finden. Diese Darstellungsweise läßt bereits erkennen,

9.11.1929 Heegner sendet
Über die Transformation der elliptischen Funktionen
an Helmut Hasse für Crelles Journal.
Fragt nach dem Namen des Gutachters.
Hasse antwortet: es ist Erich Hecke (Hamburg).
Heckes Gutachten vom 27.4.1930:

Prof. Dr. E. Hecke
HAMBURG 13
Rothenbaumchaussee 21
Mathematisches Seminar
der Universität

Den 27. IV. 1930.

Lieber Herr Hasse,

Die Arbeit von Kurt Heegner, die ich Ihnen gleichzeitig zurücksende, ist für mich ziemlich schwierig zu beurteilen. Der Gesamteindruck ist der, dass er die Sachen versteht und eine vernünftige Idee hat, sie auch im Prinzip richtig durchführt. Aber die Darstellung ist greulich und an wesentlichen Stellen unverständlich. Wo er die Gl. (2), den Kern der Sache, her hat,

zum Teil ganz unverständlich, z. B. die Ausdrücke
kogredient, digredient, kontragrediente Resolvente etc.
hängen ganz in der Luft; er hat die umständliche, mit
recht viel neuen Wortbildungen – die ganz überflüssig sind –
belastete Ausdrucksweise von Fricke. Ich glaube, Sie
werden, wenn die Arbeit so angenommen wird, mit einem
Fricke 2 herumsuchten.

Hasse verlangt von Heegner Überarbeitung.

November 1930 Heegner schickt neue Fassung.

Hasse will nicht veröffentlichen.

Heegner protestiert.

Noch einmal Überarbeitung nötig.

Heegner an Hasse, 21.11.1930

Bei der übersandten Umarbeitung habe ich die möglichst kurze Fassung bewusst angestrebt. Es ist in meiner Lage für mich schwer zu entscheiden, was ich voraussetzen, was ich dem Leser überlassen darf. Wenn mich jemand Ihrem Vorschlage gemäss beraten könnte, so wäre ich ein gutes Stück weiter. Ich möchte Sie hiermit höflichst bitten, mir mitzuteilen, ob Sie einen von den Berliner Herren kennen, an den ich mich deswegen wenden könnte.

Schliesslich besucht Erich Bessel-Hagen (Bonn) Weihnachten 1930 Heegner in Berlin und arbeitet mit ihm an dem Manuskript - dieses wird zusehends algebraischer.

Heegner lernt damals die "Moderne Algebra" jener Zeit,
wird sie aber nie wieder wirklich benutzen.

Schliesslich erscheint eine *n*-te Fassung in Crelles Journal, Band 168 (1932).

Die einzige Veröffentlichung Heegners, in der man seine Motivation nicht wiedererkennt.

Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt.

Von *Kurt Heegner* in Berlin.

Die Beschäftigung mit den reduzierbaren Abelschen Integralen führte mich auf eine algebraische Aufgabe, welche ich für den Fall der regulären Körper nach speziellen Methoden behandelt habe [1]. In der vorliegenden Arbeit soll die Aufgabe eingehender formuliert werden und ihre Beziehung zur Gruppentheorie gegeben werden. Die Anwendung der Untersuchung auf Fragen der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen bleibt späteren Abhandlungen vorbehalten.

Abschnitt I. Formulierung der Aufgabe.

a) *Erläuterung der Aufgabe am Fall des Dieders.*

Die Resultate über das Dieder werden zur Vorbereitung der allgemeinen Theorie nochmals zur Ableitung gebracht. Gegeben sei eine reduzierte kubische Gleichung

$$x^3 - 3h_2 x - 2h_3 = 0 \tag{1}$$

mit den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Die Gesamtheit aller Tschirnhaustransformationen, die (1) wiederum in eine reduzierte kubische Gleichung überführen, ist durch die quadratische Funktion

$$cX = x^2 + xq - 2h_2 \tag{2}$$

gegeben, in welcher c und q willkürliche Parameter bedeuten. Die transformierte Glei-

Kurt Heegner hat eine mathematische Arbeit veröffentlicht.

Helmut Hasse hat sich des Aussenseiters angenommen,
offenbar in dem Bemühen, ihn an die aktuelle Mathematik,
die ihm (Hasse) am Herzen liegt, heranzuführen.

Angesichts der weiteren Karriere Heegners muss dieser
Versuch aber als gescheitert angesehen werden :
alle späteren Arbeiten Heegners liegen nicht auf der
Linie, in die Hasse Heegner gerne bingen wollte.

Helmut Hasse hat sich zur gleichen Zeit auch um den Fermatisten Otto Grün bemüht. Obwohl auch dieser nie eine akademische Karriere machte, brachte ihn Hasse doch von Fermat ab und zur Gruppentheorie, in der er einige einflussreiche Sätze bewies.


Kurt Heegner
~ 1935

Die *Mathematische Zeitschrift* war toleranter :

En los años 1930, Kurt Heegner llega a publicar otros 6 artículos matematicos, todos en la *Mathematische Zeitschrift* :

Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale I, II.
MZ 31 (1929/30), 457–480 y 481–497.

Elliptische Funktionen und Kegelschnittbüschel.
MZ 39 (1935), 663–671

Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen I, II, III.
MZ 43 (1937), 161–204 y 321–352 ; 44 (1938), 555–567

Diese Arbeiten sind sicher den ursprünglichen Manuskripten viel näher.
Sie belegen den analytischen Aspekt des Heegnerschen Programms
in Form von abelschen und modularen Funktionen
(relativ zu Gruppen, die eine gewisse quadratische Form fest lassen).

Mathematisch - Naturwissenschaftliche Fakultät
der
Friedrich - Wilhelms - Universität

Tgb.-Nr. 1385

Anlagen!

Berlin C2, den 6.3.1939.
Universität

Am 1. März 1939 fand die "wissenschaftliche Aussprache" mit Dr.phil. Kurt H e e g n e r (Fach: Mathematik) statt.

Professor W e b e r eröffnete die Aussprache. Sie drehte sich zunächst um die historische Einordnung der H e e g n e r 'schen Habilitationsschrift, um die erste Anwendung analytischer Hilfsmittel in der Theorie der quadratischen Formen, die Möglichkeit elementarer Beweisführung. Vom Waring'schen Problem wurde gesprochen, der Begriff Dichte einer Zahlenmenge erörtert und dann zu den Untergruppen der Modulgruppe und ihren Resolventen übergegangen. Weitere Fragen handelten von den rationalen Punkten auf Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht I, von der Möglichkeit eines algebraischen Beweises des Riemann'schen Existenztheorems, vom Fundamentalsatz der Algebra.

Professor S c h m i d t berührte das Gauss'sche Problem der linearen Transformationen einer indefiniten ternären quadratischen Form in sich.

An
Seine Magnifizenz,
den Herrn R e k t o r ,
h i e r .

Der

Auf der Grundlage seiner 3 letzten Veröffentlichungen erlangt *Dr. Kurt Heegner* im März 1938 seinen *Dr. habil.* an der Universität Berlin. Diese rein wissenschaftliche Qualifikation bedeutet weder das Recht zu lehren noch eine politische Beurteilung. Prüfer sind Erhard Schmidt und Werner Weber; beide teilen nicht sein Programm.

Der *Dr. habil.* markiert Heegners grösste Annäherung an die akademische Mathematik.

Wir habe keine Dokumente über Motive oder Ziele die er verfolgte, oder die die Prüfer mit diesem Akt verbanden.

Dr. K. Heegner
Berlin-Steglitz,
Elisen-str.7

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von
Kurt Heegner in Berlin.

Rec. der Kantate Nr.51
Joh. Seb. Bach.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Masszahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, dass es solche Dreiecke nicht gibt, führt Fermat auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

(1) $$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

ergibt sich die ~~Bedingung~~ diophantische Gleichung

(2) $$ab(a^2-b^2)=\square .$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1,2)

(3) $$a=a_*^2\ ,\quad b=b_*^2$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

(4) $$a_*^4-b_*^4=\square ,$$

bei dem die Nullstellen des Verzweigungspolynoms gleichfalls harmonisch liegen. Die Unmöglichkeit von (4) kann dahin formuliert werden, dass die mittlere Proportionale aus einer Kathete und der Hypotenuse eines "pythagoreischen Dreiecks" nicht rational sein kann. In diesem Satze ist zugleich die Aussage Fermats über die bekannte Potenzengleichung für den Fall des Exponenten vier enthalten.

Bachkantate

Erste Seite des Originalmanuskriptes der berühmten Arbeit Kurt Heegners, 1951 eingegangen und 1952 erschienen in *Mathematische Zeitschrift*.

Beginn der gedruckten Arbeit

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 227—253 (1952).

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Maßzahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, daß es solche Dreiecke nicht gibt, führt FERMAT auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \tag{1}$$

ergibt sich die diophantische Gleichung

$$ab(a^2 - b^2) = \text{Quadrat}. \tag{2}$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1, 2)

$$a = a_*^2, \quad b = b_*^2 \tag{3}$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

Überblick :

Heegners Argument dafür, dass es keine anderen *n* als die bekannten gibt, für die der *J*-Wert, den wir bei Ramanujan gesehen hatten, eine ganze Zahl ist.

Se puede suponer que $d_K \equiv 5 \pmod 8$; $d_K \equiv -1 \pmod 3$. Entonces $\mathbf{Z}[\sqrt{d_K}] = \mathfrak{o}_{K,2}$, y el *ring class field* de conductor 2 de K es (según Weber, Algebra III)

$$L := \mathbf{Q}\Big(\sigma(\sqrt{d_K})^2\Big) = \mathbf{Q}\Big(j(\omega_K), \sigma(\beta)^8\Big) = \mathbf{Q}\Big(\sigma(\beta)^2\Big)$$

compuesto con K, donde $\beta = \frac{\sqrt{d_K}-1}{\sqrt{d_K}+1}$, $\omega_K = \frac{1+\sqrt{d_K}}{2}$, y σ es la función de Schlaefli

$$\sigma(\tau) = q^{\frac{-1}{24}} \prod_{\nu \geq 1} (1 + q^{2\nu - 1}), \quad q = e^{i\pi\tau}.$$

Las identidades entre funciones modulares dan los polinomios minimales sobre el cuerpo $\mathbf{Q}(j(\omega_K))$ (se observa que $[L : \mathbf{Q}(j(\omega_K))] = 3$):

- para $\sigma(\beta)^8$: $\quad t^3 - \gamma_2(\beta)t - 16 \quad$ donde $\gamma_2 = (\sigma^{24} - 16)\sigma^{-8} = j^{1/3}$
- para $\sigma(\beta)^4$: $\quad t^3 + 2At^2 + 2A^2t - 4 \quad$ donde $4A(A^3+4) + \gamma_2(\beta) = 0$
- para $\sigma(\beta)^2$: $\quad t^3 \pm 2pt^2 + 2qt \pm 2 \quad$ donde $A = 2(q-p^2), A^2 = 2(q^2 - 2p)$

con enteros A, p, q del cuerpo $\mathbf{Q}(j(\omega_K))$. Igualando las dos expresiones para A^2 resulta:

$$(E) \qquad s^2 = 2p(p^3 - 1) \qquad [\text{ con } s = q - 2p^2]$$

Heegners Argument setzt die fraglichen *n* in Beziehung zu den ganzen Lösungen dieser Gleichung.

Si el numero de clases de K es uno, $j(\omega_K) \in \mathbf{Z}$, y obtenemos un punto racional entero sobre la curva eliptica (E). Pero todas estos son (como ya dijo Euler):

$$(p, s) = (0,0), (1,0), (-1, \pm 2), (-2, \pm 6).$$

Das grösste n mit dieser Eigenschaft ist ....

Recensiones sobre el artículo de Heegner

Zwei Besprechungen des Artikels

Math. Reviews **14**, 1953, p. 725, by M. Ward (Pasadena, Calif.):

The author applies the transformation theory of modular forms for the case of singular moduli (complex multiplication) to obtain results on the solutions of various cubic and quartic diophantine equations in two variables. The solutions are usually in the rational field or the class field of the multiplication. Most of the equations considered are of the form $p(au^4 + b)$ or $p(cu^3 + d)$ equal to a square. Here p is a prime and a, b, c, d are small integers fixed by the complex multiplication being considered. The author proves in addition, by extending certain results of Weber on complex multiplication, that the only quadratic fields with negative discriminant and class number unity are the known classical cases.

Zentralblatt **49**, p. 162, by B. Schoeneberg (Hamburg):

Die Transformationstheorie der Modulformen und gewisse Ergebnisse Webers uber komplexe Multiplikation werden zur Lösung von diophantischen Gleichungen $f(x) = z^2$, wo $f(x)$ ein Polynom 3. oder 4. Grades ist, und zur Bestimmung aller imaginär-quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{d})$ mit der Klassenzahl $h = 1$ verwendet. Danach existieren keine anderen $R(\sqrt{d})$ mit $h = 1$ als die seit langem bekannten. Es sei jedoch bemerkt, dass die Beweise dem Ref. an mehreren Stellen unverständlich sind.

Heegners Arbeit wird bis zu seinem Tod (1965) nicht anerkannt. Erst als ein anderer Mathematiker auf anderem Wege das Problem (wieder) löst, studieren Kollegen Heegners Lösung :

- 1967. Harold Stark (Michigan) löst das Problem (analytische Klassenzahlformel, Kroneckersche Grenzformel. In seiner Lösng taucht die Gleichung (E) wieder auf.
- 1968. Carl Ludwig Siegel (Göttingen) gibt eine Variante der Starkschen Lösung, mit anderen Modulformen.
- 1968. Brian Birch (Oxford) beginnt eine Reihe von Arbeiten über ***Heegner-Punkte***. Rechtfertigt im Wesentlichen Heegners Lösung von 1952.
- 1968. Max Deuring (Göttingen) analysiert Heegners Argument und findet es richtig.
- 1969. Stark stellt seine Analyse des Heegnerschen Arguments vor.
- 1970. Curt Meyer (Köln) stellt seine Analyse des Heegnerschen Arguments vor.
- 2008. Google gibt über 26000 URLs zu “Heegner”.

Haben diese Geschichten eine Moral ?

- Aussenseiter formulieren in der Regel ihre Einsichten in unaktueller, im Vergleich zum momentanen Lauf der Forschung veralteter oder ungewöhnlicher Weise.
- Aussenseiter suchen natürlich die Anerkennung der Profession; die Profession bedarf ihrer zunächst nicht.
- Verschiedene persönliche Arten, damit umzugehen.

- Unabhängig davon ist es die grosse **Resilienz** alter oder alternativer Ansätze, die den Aussenseitern in der Mathematik im Prinzip immer wieder Chancen eröffnet.