COLLOQUIUM

El «outsider» de la teoría de los números

Vida y obra de Kurt Heegner

Norbert Schappacher
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Departamento de Matemáticas, aula C-XV-520
Miércoles 20 de febrero de 2008, 15:30 horas

Publicación en preparación
con
S.J. Patterson (Göttingen)
y
H. Opolka (Braunschweig)

I.

Kurt Heegner

niño - joven - estudiante

La familia
Heegner
~ 1900

¡ Muchas gracias
a Fritz Heegner,
junior, para
imagines y
recuerdos !

Kurt Heegner, el tercer niño de la familia

- El 16 de diciembre de1893 Kurt Heegner nace en Berlín
- Los tres hermanos van a *Askanisches Gymnasium* (*humanistisch*, es decir: se enseña el griego clasico), entonces uno de los mejores institutos de Berlín; fundado en1875, domiciliado en Berlín-Kreuzberg, Hallesche Strasse 22-24.
- Octubre de 1913 Kurt Heegner obtiene el bachillerato
- 1914 - 1917 estudiante en la Universidad de Berlin:
  matematicas (sus profesores: Hermann Amandus Schwarz, Konrad Knopp) y
  física (con Max Planck, Heinrich Rubens; física experimental, electricidad con Arthur Wehnelt)

Servicio militar no hasta 1917

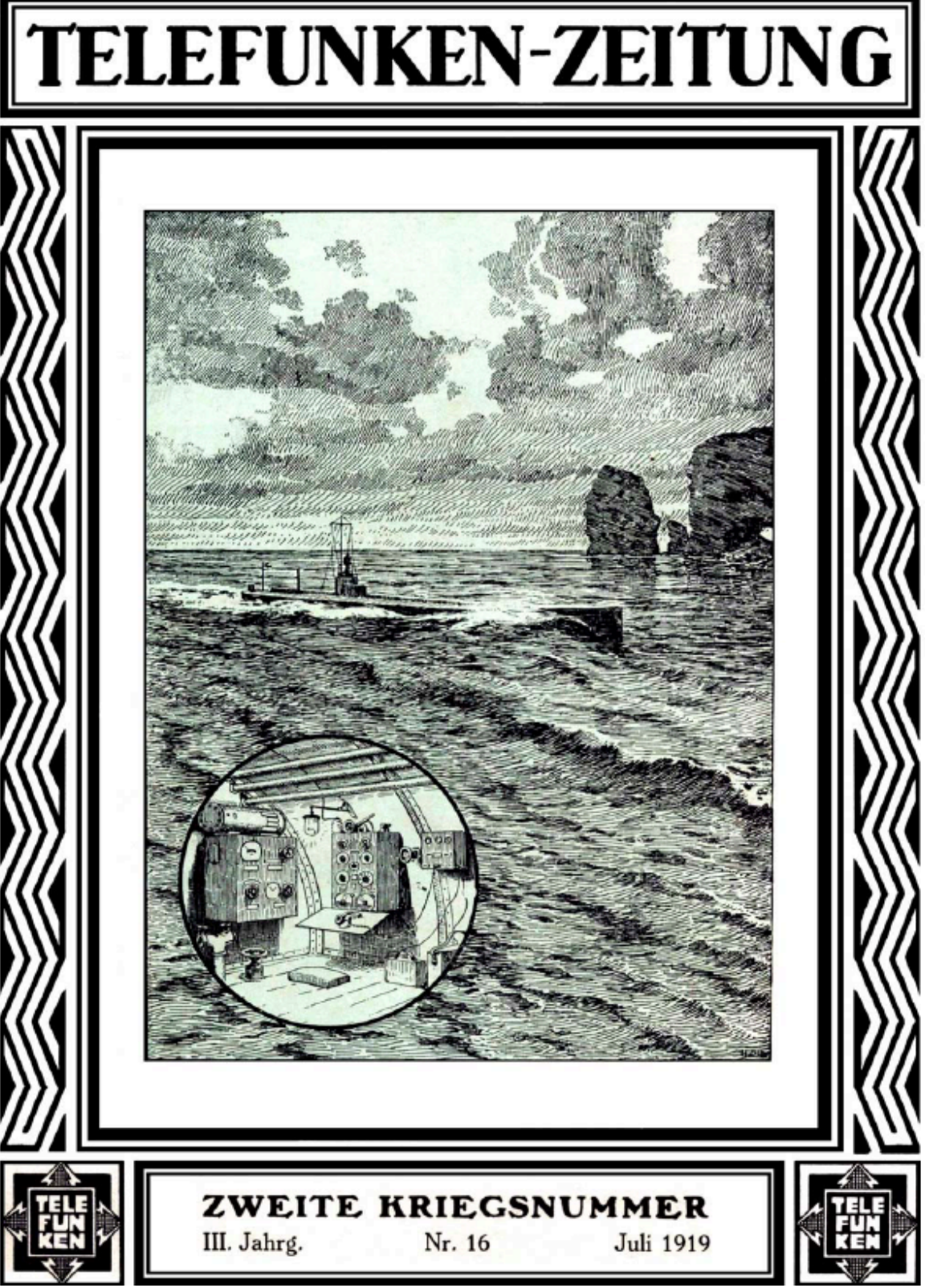
- El 11 junio de 1917 convocado al servicio : *Grenadier* en el *Kaiser-Franz-Regiment, Ersatzbataillon, 2. Kompagnie*.
- El 8 julio de 1917 concibe una demanda de incorporación al servicio meteorológico des los tropas de aeronaves.
- Pero trabaja finalmente en una sección técnica de telecomunicaciones radioeléctricas, dirigida por Walter Rogowski*.
- Heegner continúa su trabajo en el laboratorio militar durante la revolución en Alemania, después de la capitulación de 1918. Este trabajo resulta en su tesis .....

* *1881-1947, ex-estudiante de Sommerfeld, fundó en1913 el Archiv für Elektrotechnik*
1919 profesor en Jena
desde 1920 en Aquisgrán.

II.

Kurt Heegner,

técnico e inventor



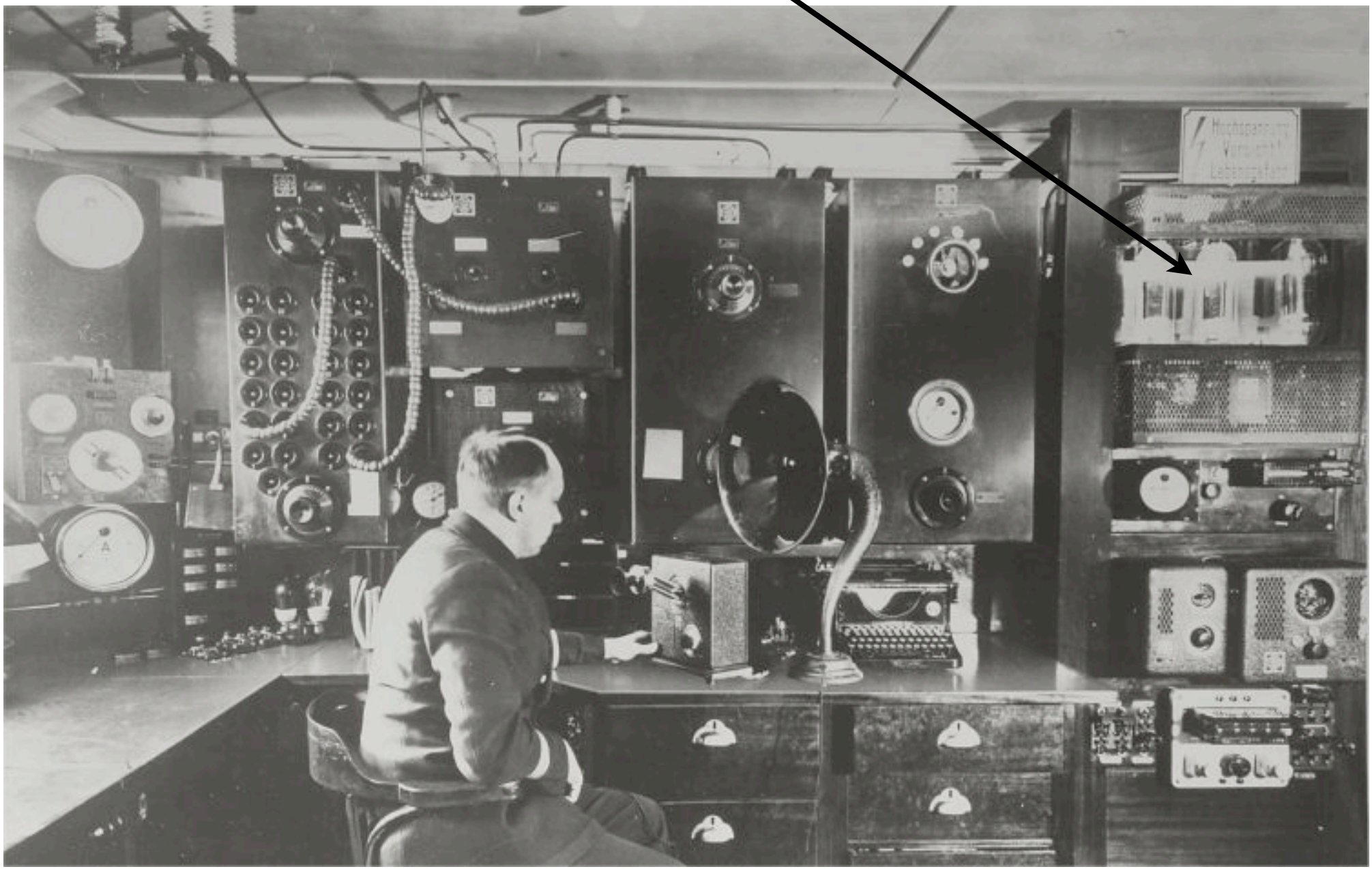
La primera guerra mundial fue Jauja para el desarrollo de la radio-tecnología.

Mikrophon für Telephonie

Transmisor desarrollado en la primera guerra mundial por *Telefunken* para montaje en submarinos

Röhrensender *Telefunken ARS 78*

“Zwischenkreisröhrensender” de Telefunken de 1922
montado en el buque de vapor *New York*



TS *New York* mit Röhrensender CP-IV

Los publicaciones técnicas de Heegner (1920-1925)

- *Über den Zwischenkreisröhrensender.** Diss. Jena 1920. Springer Verlag 1920.
- Zwischenkreisröhrensender. *Archiv für Elektrotechnik* 9 (1920)
- Elektrisch und magnetisch gekoppelte, durch Elektronenröhren erregte Schwingungskreise. *Archiv für Elektrotechnik* 11 (1922), 12 (1923)
- Labile Röhrenschwingungen und Schwebungen in gekoppelten Kreisen. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 22 (1923)
- Auftreten von Schwebungen bei rückgekoppelten Schwingungen. *Zeitschrift für Physik* 13, 19, 24 (1923/24)
- Selbsterregungserscheinungen an Schwingungskreisen mit Eisenkernspule. *Zeitschrift für Fernmeldetechnik* 5 (1924)
- Selbsterregungserscheinungen bei Systemen mit gestörter Superposition. *Zeitschrift für Physik* 29 (1924), 33 (1925)

* La tesis tambien contiene indicaciones para un tratamiento matemático más profundo, con integrales elípticas.

Los publicaciones técnicas de Heegner (1927-1938)

- Schwingungserzeugung mittels Elektronenröhrensystemen, welche Selbstinduktion nicht enthalten. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 29 (1927)
- Messungen an piezoelektrischen Kristallen. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 29 (1927)
- Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystems, welches keine Selbstinduktion enthält. *Zeitschrift für Physik* 42 (1927)
- K.H. & Watanabe : Schwingungserzeugung durch Elektronenröhrensysteme, bei welchen die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie* 34 (1929)
- Schwungradschaltung und Serienschaltung bei selbsterregten, durch Elektronenröhren erzeugten Schwingungen. *Hochfrequenztechnik und Elektroakustik* 40 (1932)
- Kristalloszillator nach Peirce. *Elektronik und Nachrichten-Technik* 10 (1933)
- Gekoppelte selbsterregte elektrische Kreise und Kristalloszillatoren. *Elektronik und Nachrichten-Technik* 15 (1938)

Heegner tuvo varias patentes; las vendió de ordinario a *Telefunken* o *Loewe*

DEPATISnet-Startseite | Information | Einführung |

Deutsches Patent- und Markenamt

DEPATISnet

Recherche | IPC

Einsteiger | Experte | Ikofax | Familie | Assistent

> DEPATISnet-Startseite > Recherche > Einsteiger > Trefferliste

Trefferliste

Suchanfrage:

heegner/PA

Zurück zur Recherche

TREFFERLISTE: TREFFER: 4 (GESAMTTREFFER: 4) ANGEZEIGTE TREFFERLISTE HERUNTERLADEN

Nr.	Veröffentlichungs-Nummer ▲	Titel	Anzeige PDF	Familien-Recherche
1	DE000000603006A	[ ] Durch piezoelektrischen Kristallresonator erregter Oszillator		Suchen
2	DE000000359505A	[ ] Anordnung zur Erzeugung von Kopplungsschwingungen		Suchen
3	DE000000359504A	[ ] Anordnung zur Schwingungserzeugung		Suchen
4	GB000000431068A	[ ] Crystal-controlled thermionic valve oscillator		Suchen

|< < > >| Drucken Zurück zur Recherche

ÉXITO Y SOLEDAD DEL INVENTOR KURT HEEGNER

Betrifft: Erfindungsangebot Dr.Heegner - DRP 603 006

Acta, conservada en el archivo ***Telefunken*** en Berlin, de una entrevista del 31 marzo de 1939.

Am 31.3.1939 fand um 15^{30} Uhr bei Herrn Dr. Bechmann eine Besprechung mit Herrn Dr. Heegner statt, welche Herr Dr. Bechmann angeregt hatte, um näheres über die Absichten des Herrn Dr. Heegner in Bezug auf das obige Patent und über den Inhalt einer von Herrn Dr. Heegner Ende 1938 eingereichten Zusatzanmeldung zu erfahren.

Herr Dr. Heegner redete unklar und unverständlich wie immer, jedoch konnte man sich am Schluss der längeren Unterhaltung von seinen Wünschen und Anschauungen folgendes Bild machen:

Herr Dr. Heegner habló confusa e incomprensiblemente como siempre. Pero al final de esta larga conversación, se perfilaron sus deseos y opiniones.

Herr Dr. Heegner fühlt sich unsicher hinsichtlich der in Aussicht genommenen Regelung betreffend das amerikanische und das britische Patent. Er behauptet, von einer Seite, die er nicht nennen will, insbesondere vor der RCA als einer gänzlich unbeteiligten Firma warnt worden zu sein. Er fürchtet, dass Marconi und RCA das Angebot ablehnen und er dann zwar mit Rücksicht auf unser Schreiben vom 15.3.1939 keine Kosten, aber auch keinen Nutzen an den beiden Auslandsschutzrechten hätte, insbesondere wo er selbst nicht weiss,

Informe sobre Heegner de una agencia de detectives, encargado por Telefunken

33

Büro: Berlin, den 22.1.41 Ihr Akt.-Z.: - - -

22 de enero de 1941

Wir erteilen Ihnen diese Auskunft gemäß unseren Geschäftsbedingungen unter Ausschluß jeder Haftung auf Grund unseres betriebsüblichen Erkundigungsdienstes. Die Auskunft ist nur für den Anfragenden bestimmt, bleibt Eigentum der Auskunftei und ist auf Verlangen zurückzugeben.

Auskunft über: Streng vertraulich.

Dr.phil. Kurt Heegner ..... Berlin-Steglitz
- Privatgelehrter - Elisenstrasse 7.

Dr. Heegner, End[illegible] Jahre geboren, ledig, hat Philo-sophie studiert und beschäftigt sich hauptsächlich mit wissen-schaftlichen [illegible] im Auftrage anderer übt Dr. Heegner nicht aus. Er ist vielmehr persönlicher Liebhaber [illegible] Privatgelehrter.

... se dedica principalmente a cuestiones científicas en el ámbito de las matemáticas ... aficionado, trabaja sin remuneración.

Elisenstr.7 wohnt Dr.Heegner bei seiner Mutter, Frau Klara Heegner. Diese ist Witwe eines verstorbenen Reichsbeamten und erhält eine gute Pension. Es wird auch angenommen, dass Frau Heegner etwas Vermögen besitzt. Sie hat eine Wohnung von 4 Zimmern gegen monatlich etwa 120.-RM in Benutzung.

... vive recluido, sin pretensiones.

Die Verhältnisse werden als geordnet bezeichnet. Dr.Heegner ist anspruchslos und lebt zurückgezogen. Bei [illegible] Kredite wird empfohlen, Frau Klara Heegner mitzuverpflichten.

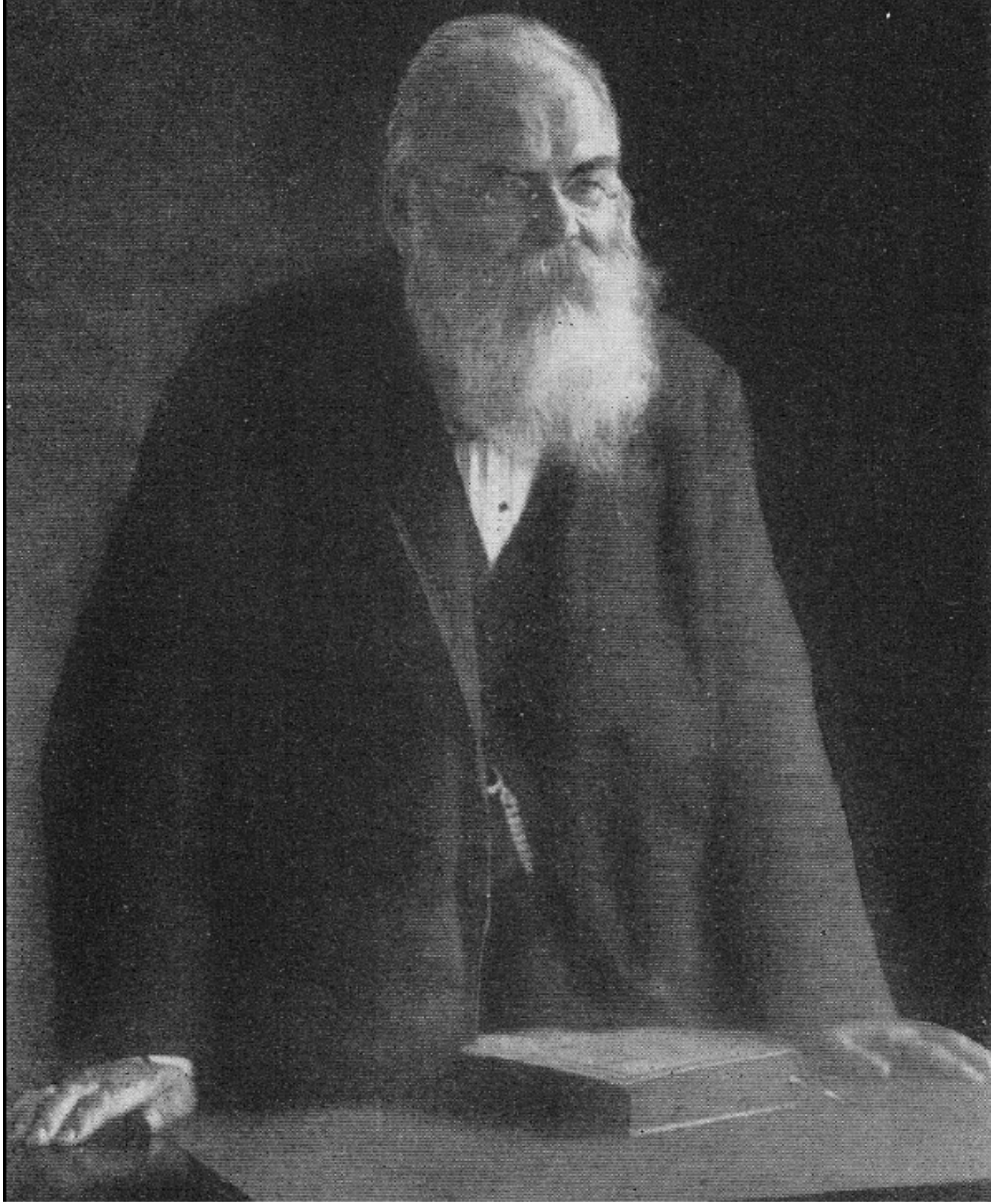
En caso de conceder un crédito importante se recomienda de corresponsabilizar a su madre con él.

III.

La perspectiva matemática

de Kurt Heegner :

el programa central de su vida



Hermann Amandus SCHWARZ (1843-1921)

ex-alumno de Weierstrass

yerno de E.E. Kummer

Prof. en Berlín desde 1892 cuando ya había dejado la investigación (obras completas publicadas en 1890)

Fue el matemático con el influjo más grande sobre el estudiante Heegner 1914-1917.

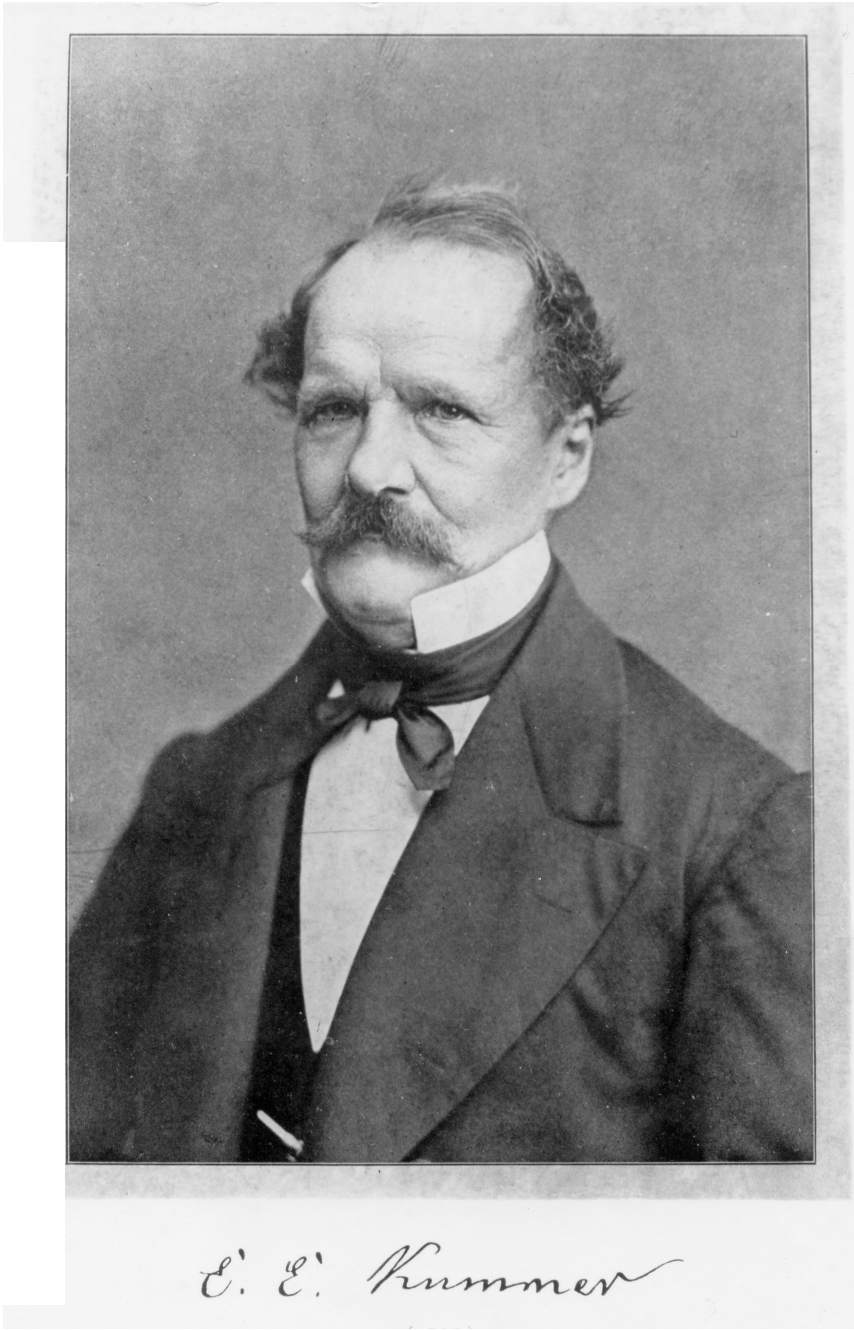
H.A. Schwarz sugirió a sus estudiantes generalizar el artículo de Ernst Eduard Kummer sobre los "cuadriláteros racionales" (*Journal de Crelle*, 1848)

1.

Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

Die Aufgabe: Vierecke zu bilden, deren Seiten und Diagonalen sich durch rationale Zahlen ausdrücken lassen, findet sich schon in den Werken der Inder, namentlich des ***Brahmegupta*** behandelt, welcher nach ***Colebrooke's*** Annahme etwa sechs hundert Jahre nach Christi Geburt gelebt hat. Die hierher gehörenden Sätze des Indischen Mathematikers haben ein sehr mysteriöses Ansehen, so dafs ihr wahrer Sinn nur schwer zu erkennen ist, welchen jedoch ***Chasles*** in der 12ten Note zu seiner Geschichte der Geometrie glücklich enträthselt hat. Es finden sich daselbst auch über den ganzen Abschnitt von den ebenen Figuren viele sehr schätzenswerthe Aufklärungen; die ***Methode*** indessen, von welcher ***Brahmegupta*** Gebrauch gemacht hat, um zu den erwähnten Sätzen über das Viereck zu gelangen, scheint dieser geistvolle Geometer nicht genau erkannt zu haben. Wir wollen hier eine kurze Auseinandersetzung derselben geben.

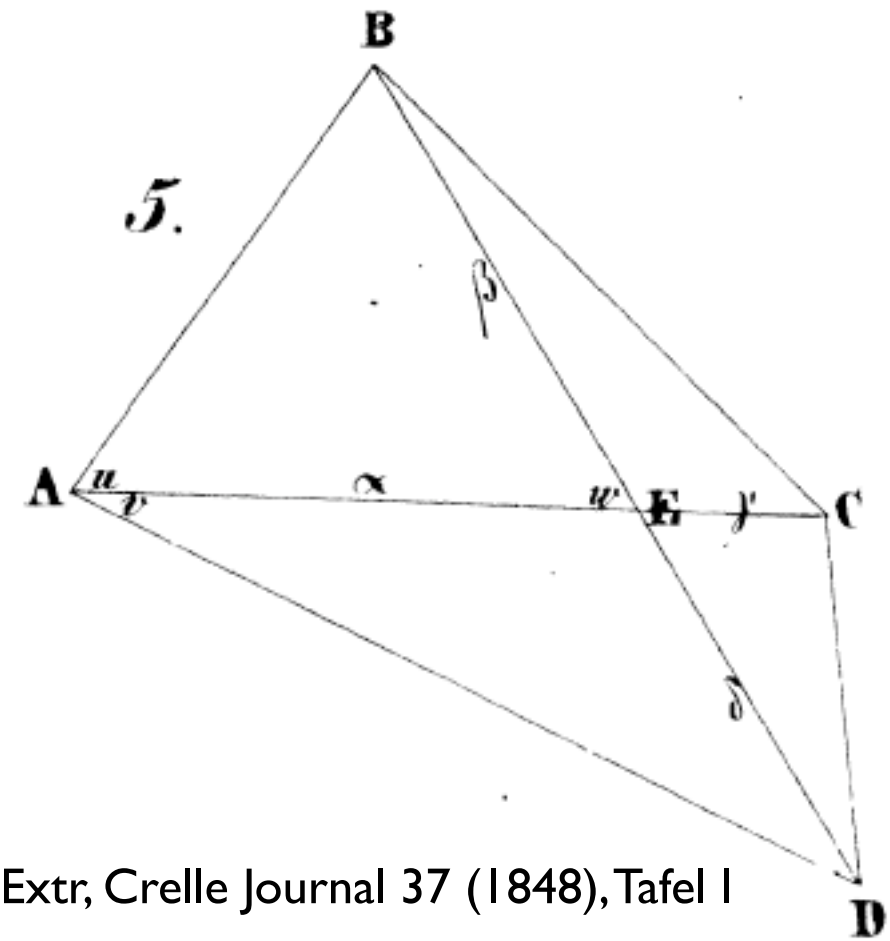


El problema tratado por Kummer:

Parametrizar los cuadriláteros (convexos) de cuyos lados y diagonales son racionales.

El primer lema de Kummer :

Entonces los cuatro segmentos α, β,γ,δ *de las diagonales son también racionales*.



Extr, Crelle Journal 37 (1848), Tafel I

Así Kummer analiza los triángulos racionales, p.ej. AEB, llamando *c* al coseno (¡ racional !) del ángulo *w*.

Por fin, considerando α,γ,*c* como parametros racionales, Kummer traduce el problema en buscar todos los puntos racionales sobre la curva elíptica :

$$y^2 = \left\{\alpha x^2 - 2c(\alpha+\gamma)x - \alpha(1-c^2)\right\}^2 + 4(1-c^2)\gamma^2 x^2$$

Rationale Vierecke und Tetraeder und ihre Beziehung zu den elliptischen und hyperelliptischen Funktionen und Modulfunktionen

Von Kurt Heegner in Berlin

I. Kummersche und Weddlesche Fläche: symmetrische Permutationsgruppen.

Mit der Aufgabe, die algebraischen Beziehungen der Elementargeometrie durch rationale Zahlwerte zu erfüllen, haben sich die Mathematiker von Alters her beschäftigt. In den arithmetischen Schriften Eulers finden sich verschiedene Arbeiten dieser Art. Die allgemeine Aufgabe, Vierecke zu finden, deren Seiten und Diagonalen rationale Masszahlen haben (Problem der "rationalen Vierecke"), ist von E.E. Kummer behandelt worden [1]. H.A. Schwarz berichtete bei seiner Lehrtätigkeit am Berliner mathematischen Seminar davon, dass Kummer seinen Schülern die Aufgabe gestellt hat, Tetraeder mit rationalen Masszahlen der Kantenlängen und des Volumens zu finden (Problem der "rationalen Tetraeder"). H.A. Schwarz hat auf das Studium solcher Aufgaben grossen Wert gelegt und die Mitglieder des Berliner Seminars fortgesetzt ermuntert, sich mit diesen Aufgaben zu beschäftigen. Arbeiten von F. Neiss [2] und O. Schulz [3] legen hiervon Zeugnis ab. Im besonderen enthält

Las primeras lineas de este manuscrito (¿ ~ 1930 ?) todavía inédito de Kurt Heegner sobre los cuadriláteros y tetraedros racionales, recuerdan el seminario de Schwarz en Berlin.

... y Heegner habla de su contribución personal

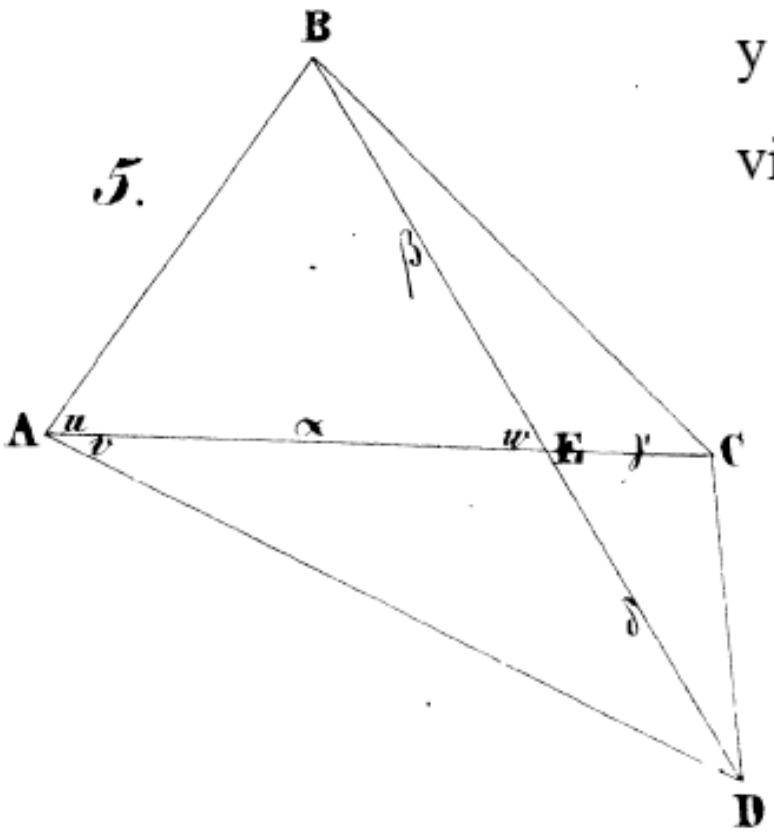
Problems bis zum Jahre 1914. Ich selbst fiel H.A. Schwarz in den Kriegsjahren 1915/16 dadurch auf, dass ich bei der Behandlung dieser Aufgaben geeignete rechtwinklige Koordinaten einführte. Diese Untersuchungen haben mir mannigfache Anregung zu anderen Arbeiten gegeben. In grösseren Zeitabständen bin ich jedoch zu diesen Aufgaben immer wieder zurückgekehrt und habe sie

Yo mismo llamé la atención de H.A. Schwarz durante los años de guerra 1915/16 a través de la introducción de coordenadas rectangulares adecuadas. Estas investigaciones me han dado multiples inspiraciones para otros trabajos, pero tarde o temprano volvía siempre a estos problemas ....

Otros estudiantes de Schwarz :

- Dos libros de Otto Schulz publicados en 1914
- Friedrich Neiss, Leipzig tesis 1914 : *Rationale Dreiecke, Vierecke und Tetraeder*

En Schulz y Neiss, y en el manuscrito de Heegner - que vamos a editar - el dibujo "5." de Kummer es también visto como un tetraedro aplastado.



El volumen V del tetraedro con vértices 1,2,3,4 y distancias $d_{ij} \in \mathbf{Q}$ entre ellos viene dado por la formula de Cayley y Menger:

$$288 \cdot V^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso del cuadrilátero, es decir del tetraedro aplastado, Heegner observa que, fijando d_{ij} para $1 \leq i, j \leq 3$, los otros d_{i4} para $i = 1, 2, 3$ pertenecen a una superficie de Kummer muy especial, ya estudiada por Cayley. Esta superficie es un cociente del producto de dos curvas elípticas lo que Heegner analiza . . .

Este tipo de problema, vinculando cuestiones geométricas/ diofánticas con técnicas de funciones elípticas, abelianas y modulares, caracteriza el programa personal de investigación matemática de Kurt Heegner.

El título de otro manuscrito inédito expresa bien este programa :

Geometrische Arithmetik

Kurt Heegner

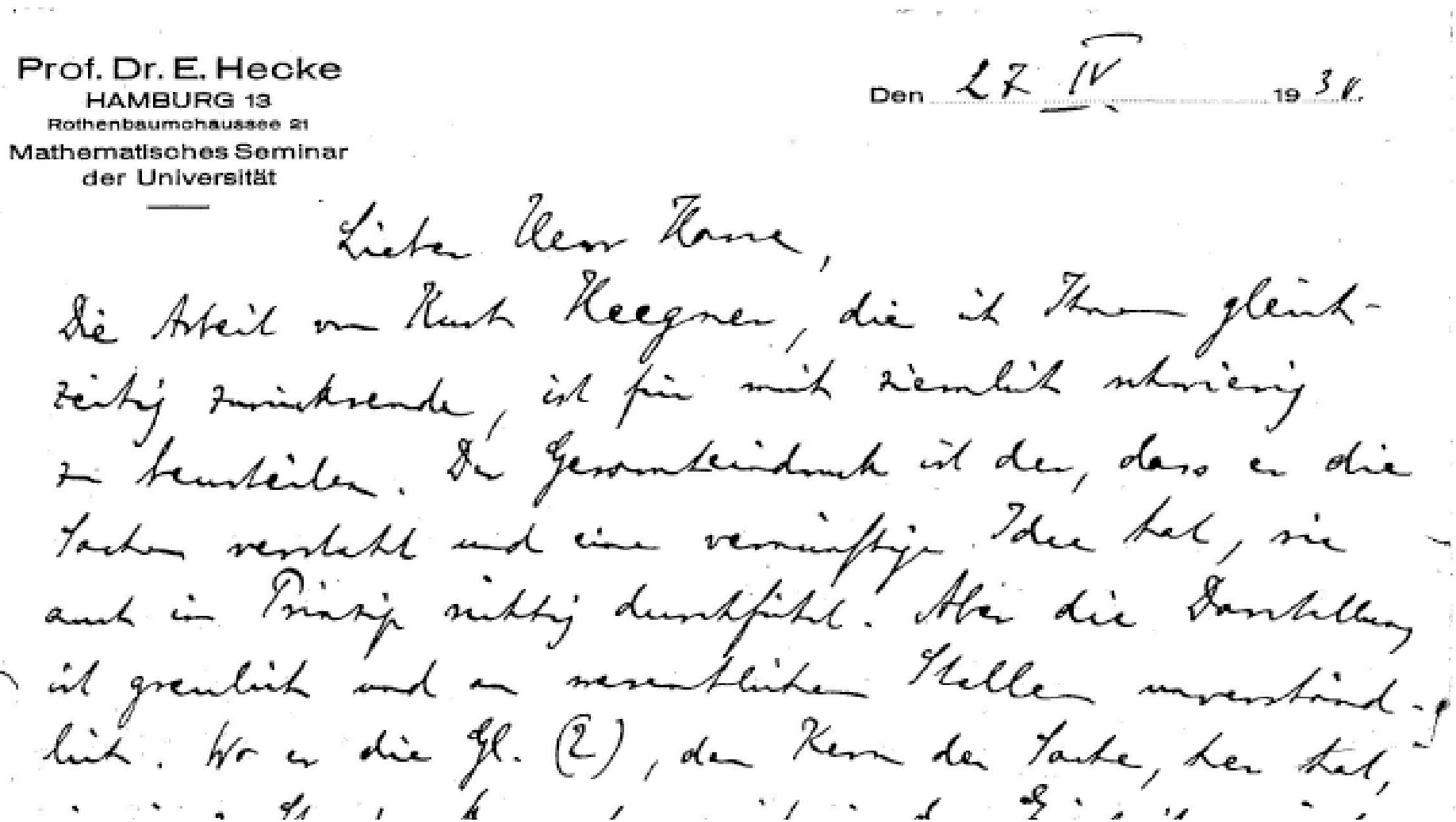
Die vorliegende Arbeit enthält die wunderbaren Prinzipien, welche zur allgemeinen Auflösung der Kummerschen Aufgaben führten, alle Vierecke mit rationalen Seiten und rationalen Diagonalen und alle Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Volumen zu bestimmen. Wir werden diese rationalen Gebilde analytisch darstellen und geben als grundlegenden Gegenstand der geometrischen Arithmetik die Aufgabe an, n Punkte von rationalen Koordinaten und rationaler Entfernung zu finden. Diese Darstellungsweise läßt bereits erkennen,

IV.

Kurt Heegner y el mundillo matemático

Primer episodio : 1929-1932
Publicación en el Journal de Crelle

El 9 de noviembre de 1929 Heegner entrega su manuscrito *Über die Transformation der elliptischen Funktionen* a Helmut Hasse para su publicación en el Journal de Crelle. Pregunta por el nombre del *referee*.
Hasse responde: es Erich Hecke.
El informe de Hecke, del 27 de abril de 1930:



Prof. Dr. E. Hecke
HAMBURG 13
Rothenbaumchaussee 21
Mathematisches Seminar
der Universität

Den 27 IV 1930.

Lieber Herr Hasse,

Die Arbeit von Kurt Heegner, die ich Ihnen gleichzeitig zurücksende, ist für mich ziemlich schwierig zu beurteilen. Der Gesamteindruck ist der, dass er die Sachen versteht und eine vernünftige Idee hat, sie auch im Prinzip richtig durchführt. Aber die Darstellung ist greulich und an wesentlichen Stellen unverständlich. Wo er die Gl. (2), den Kern der Sache, hat,

Extracto del informe de Hecke

El trabajo de Heegner ... es bastante difícil de juzgar para mí. Mi impresión general es que él comprende las cosas, que tiene una idea razonable y que la lleva a cabo de manera esencialmente correcta. Pero la presentación es atroz y en lugares esenciales, incomprensible. ... Su terminología es muy borrosa. ... No comprendo sus expresiones de la teoria de los invariantes, p.ej. los terminos *kogredient, digredient, kontragrediente Resolvente* ... Él tiene esa manera de expresarse de Fricke, abrumada por muchos neologismos, perfectamente superfluos. Creo que, si el trabajo es aceptado así, usted va criar un Fricke_2.

En consecuencia Hasse exige a Heegner volver a escribir el manuscrito.

En noviembre de 1930 Heegner envia una nueva, segunda versión.

Entonces Hasse pone en duda la posibilidad de publicar el trabajo.

Heegner protesta.

Necesidad de rehacer el manuscrito una vez más.

Extracto de la carta de Heegner a Hasse, 21 nov 1930

Bei der übersandten Umarbeitung habe ich die möglichst kurze Fassung bewusst angestrebt. Es ist in meiner Lage für mich schwer zu entscheiden, was ich voraussetzen, was ich dem Leser überlassen darf. Wenn mich jemand Ihrem Vorschlage gemäss beraten könnte, so wäre ich ein gutes Stück weiter. Ich möchte Sie hiermit höflichst bitten, mir mitzuteilen, ob Sie einen von den Berliner Herren kennen, an den ich mich deswegen wenden könnte.

En mi situación es difícil saber qué puedo presuponer, dejar al lector. Si alguien pudiera aconsejarme sobre como seguir sus sugerencias, habré avanzado mucho. Así le pido, por favor, que me comunique si usted conoce a alguno de los colegas en Berlín, a quien pueda acudir.

Finalmente, Erich Bessel-Hagen de Bonn pasa la Navidad de 1930 en Berlín y trabaja con Heegner sobre el manuscrito que llegará a ser mucho más algebraico.

Durante los meses siguentes Heegner descubre el álgebra moderna de la época, entre otros a través del libro de van der Waerden.

En fin, después de un intercambio más con Hasse, la quinta versión del manuscrito se publica en Crelle 168 (1932). A cambiado incluso el título; ya no se reconoce, en este argumento de teoría de Galois de cuerpos de funciones, el origen de la investigación de Heegner.

Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt.

Von *Kurt Heegner* in Berlin.

Die Beschäftigung mit den reduzierbaren Abelschen Integralen führte mich auf eine algebraische Aufgabe, welche ich für den Fall der regulären Körper nach speziellen Methoden behandelt habe [1]). In der vorliegenden Arbeit soll die Aufgabe eingehender formuliert werden und ihre Beziehung zur Gruppentheorie gegeben werden. Die Anwendung der Untersuchung auf Fragen der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen bleibt späteren Abhandlungen vorbehalten.

Abschnitt I. Formulierung der Aufgabe.

a) *Erläuterung der Aufgabe am Fall des Dieders.*

Die Resultate über das Dieder werden zur Vorbereitung der allgemeinen Theorie nochmals zur Ableitung gebracht. Gegeben sei eine reduzierte kubische Gleichung

$$x^3 - 3h_2 x - 2h_3 = 0 \tag{1}$$

mit den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Die Gesamtheit aller Tschirnhaustransformationen, die (1) wiederum in eine reduzierte kubische Gleichung überführen, ist durch die quadratische Funktion

El "outsider" ha publicado un artículo en una revista internacional; necesitó adaptarse al gusto del día y dejar su motivación sin explicación.

Hasse, el director del Journal, ha intentado sinceramente acercar al "outsider" a la comunidad de los matemáticos. Pero ignoró probablemente - o no compartió - el gran programa de Heegner.

Kurt Heegner
~ 1935

La *Mathematische Zeitschrift* fue más tolerante (¿ o descuidada ?) :

En los años 1930, Kurt Heegner llega a publicar otros 6 artículos matematicos, todos en la *Mathematische Zeitschrift* :

Diophantische Untersuchungen über reduzierbare Abelsche Integrale I, II.

MZ 31 (1929/30), 457–480 y 481–497.

Elliptische Funktionen und Kegelschnittbüschel.

MZ 39 (1935), 663–671

Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen I, II, III.

MZ 43 (1937), 161–204 y 321–352 ; 44 (1938), 555–567

Estos textos son ciertamente muy cercanos a sus versiones originales, y muestran el aspecto analitico, de las funciones abelianas y modulares (por grupos que fijan una cierta forma cuadrática) en el programa de Kurt Heegner.

IV.

Kurt Heegner y el mundillo matemático

Segundo episodio : 1938
Heegner obtiene el
"Dr. habil." en Berlín

Mathematisch - Naturwissenschaftliche Fakultät
der
Friedrich - Wilhelms - Universität

Berlin C2, den 6.3.1939.
Universität

Tgb.-Nr. 1385

Anlagen!

Am 1. März 1939 fand die "wissenschaftliche Aussprache" mit Dr.phil. Kurt H e e g n e r (Fach: Mathematik) statt.

Professor W e b e r eröffnete die Aussprache. Sie drehte sich zunächst um die historische Einordnung der H e e g n e r 'schen Habilitationsschrift, um die erste Anwendung analytischer Hilfsmittel in der Theorie der quadratischen Formen, die Möglichkeit elementarer Beweisführung. Vom Waring'schen Problem wurde gesprochen, der Begriff Dichte einer Zahlenmenge erörtert und dann zu den Untergruppen der Modulgruppe und ihren Resolventen übergegangen. Weitere Fragen handelten von den rationalen Punkten auf Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht I, von der Möglichkeit eines algebraischen Beweises des Riemann'schen Existenztheorems, vom Fundamentalsatz der Algebra.

Professor S c h m i d t berührte das Gauss'sche Problem der linearen Transformationen einer indefiniten ternären quadratischen Form in sich.

An
Seine Magnifizenz,
den Herrn R e k t o r ,
h i e r .

Der

Basado sobre sus tres ultimas publicaciones, el *Dr.* Kurt Heegner obtiene (en marzo de 1938) el grado *Dr. habil.* de la Universidad de Berlin. Es una distinción científica; no da derecho a enseñar, no implica aprobación politica. Sus examinadores: Erhard Schmidt y Werner Weber no comparten su gran programa.

Sin embargo el *Dr. habil.* marca el maximo acercamiento del "outsider" Heegner a la comunidad profesional.

V.

Kurt Heegner
y
el nazismo,
la guerra,
la posguerra

- Kurt toma partido por su hermano Fritz y su esposa judía.
- La madre Clara Heegner muere en 1942; después K.H. empezó a descuidarse, sobre todo en la posguerra cuando falta el dinero: cabellos largos, barba larga, vestidos usados.
- Jamás fue al refugio antiaereo durante los bombardeos de Berlín; lanzaba las pequeñas bombas incendiarias que caían en el balcón a la calle.
- Cada vez más introvertido, cree intuir directamente grandes acontecimientos, p.ej. el intento de voladura de la isla de *Helgoland* el 18 abril 1947.
- Desarolla intereses religiosos.
- Entre 1947 y 1950 recibió una ayuda (una limosna) para sus investigaciones de la Academia de Berlin [¿ por orden de Hasse ?].

VI.

Kurt Heegner y el mundillo matemático

Último episodio : 1952 ...

El legado matemático de los puntos de Heegner

Dr. K. Heegner
Berlin-Steglitz,
Elisen-str.7

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von
Kurt Heegner in Berlin.

Rec. der Kantate Nr.51
Joh. Seb. Bach.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Masszahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, dass es solche Dreiecke nicht gibt, führt Fermat auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

(1) $$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

ergibt sich die ~~Bedingung~~ diophantische Gleichung

(2) $$ab(a^2-b^2)=\square\ .$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1,2)

(3) $$a=a_*^2\ ,\quad b=b_*^2$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

(4) $$a_*^4-b_*^4=\square\ ,$$

bei dem die Nullstellen des Verzweigungspolynoms gleichfalls harmonisch liegen. Die Unmöglichkeit von (4) kann dahin formuliert werden, dass die mittlere Proportionale aus einer Kathete und der Hypotenuse eines "pythagoreischen Dreiecks" nicht rational sein kann. In diesem Satze ist zugleich die Aussage Fermats über die bekannte Potenzengleichung für den Fall des Exponenten vier enthalten.

Cantata de Bach

Primera página del manuscrito original del célebre trabajo de Heegner, recibido el 20 de octubre de 1951 y aparecido en 1952 en la *Mathematische Zeitschrift*.

el artículo impreso

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 3, S. 227—253 (1952).

Diophantische Analysis und Modulfunktionen.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Die Theorie der algebraischen Funktionen hat ihren Ursprung in der arithmetischen Fragestellung. Die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Katheten und Hypotenuse rationale Maßzahlen haben und deren Inhalt eine Quadratzahl ist, oder zu zeigen, daß es solche Dreiecke nicht gibt, führt FERMAT auf die Methode des unendlichen Abstiegs. Aus der Rationalisierung der pythagoreischen Gleichung

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \tag{1}$$

ergibt sich die diophantische Gleichung

$$a\,b\,(a^2 - b^2) = \text{Quadrat}. \tag{2}$$

Die Nullstellen des Verzweigungspolynoms dieses elliptischen Gebildes liegen harmonisch und die zugehörige elliptische Funktion ist der sinus lemniscaticus. Durch die Korrespondenz (1, 2)

$$a = a_*^2, \qquad b = b_*^2 \tag{3}$$

ist (2) arithmetisch verknüpft mit dem elliptischen Gebilde

El inicio de este trabajo de 27 páginas

- 3 pp. de introducción histórica, numeros congruentes [problema *hoy* muy bien conocido, p.ej. N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Springer1984; pero en 1952 fue considerado como pasado de moda].
  ✰ Al final de esta introducción H. enuncia muy brevemente su idea básica: ***resolver ecuaciones diofánticas por funciones modulares.***

- 3 pp. recuerdan resultados de Heinrich Weber [Algebra III, 1908] sobre algunas formas modulares. Una afirmación enunciada pero no demostrada por Weber es repetida por Heegner, pero sin prueba escrita aquí.
  ✰ Al final de esta parte, Heegner escribe que sus argumentos dan ***una demostración casi elemental de que D = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163 son todos los discriminantes de cuerpos cuadráticos imaginarios con número de clases h=1.*** [H. da una lista muy completa, más próxima a la de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.]

- 2 pp. sobre las "integrales reducibles", es decir (en el lenguaje de hoy) la decomposición en variedades abelianas simples de la jacobiana de una cierta curva hiperelíptica.

Se puede suponer que $d_K \equiv 5 \pmod 8$; $d_K \equiv -1 \pmod 3$. Entonces $\mathbf{Z}[\sqrt{d_K}] = \mathfrak{o}_{K,2}$, y el *ring class field* de conductor 2 de K es (según Weber, Algebra III)

$$L := \mathbf{Q}\Big(\sigma(\sqrt{d_K})^2\Big) = \mathbf{Q}\Big(j(\omega_K), \sigma(\beta)^8\Big) = \mathbf{Q}\Big(\sigma(\beta)^2\Big)$$

compuesto con K, donde $\beta = \frac{\sqrt{d_K}-1}{\sqrt{d_K}+1}$, $\omega_K = \frac{1+\sqrt{d_K}}{2}$, y σ es la función de Schlaefli

$$\sigma(\tau) = q^{\frac{-1}{24}} \prod_{\nu \geq 1} (1 + q^{2\nu-1}), \quad q = e^{i\pi\tau}.$$

Las identidades entre funciones modulares dan los polinomios minimales sobre el cuerpo $\mathbf{Q}(j(\omega_K))$ (se observa que $[L : \mathbf{Q}(j(\omega_K))] = 3$):

- para $\sigma(\beta)^8$: $\quad t^3 - \gamma_2(\beta)t - 16 \quad$ donde $\gamma_2 = (\sigma^{24} - 16)\sigma^{-8} = j^{1/3}$
- para $\sigma(\beta)^4$: $\quad t^3 + 2At^2 + 2A^2t - 4 \quad$ donde $4A(A^3 + 4) + \gamma_2(\beta) = 0$
- para $\sigma(\beta)^2$: $\quad t^3 \pm 2pt^2 + 2qt \pm 2 \quad$ donde $A = 2(q - p^2), A^2 = 2(q^2 - 2p)$

con enteros A, p, q del cuerpo $\mathbf{Q}(j(\omega_K))$. Igualando las dos expresiones para A^2 resulta:

$$(E) \qquad s^2 = 2p(p^3 - 1) \qquad [\text{ con } s = q - 2p^2 \,]$$

Si el numero de clases de K es uno, $j(\omega_K) \in \mathbf{Z}$, y obtenemos un punto racional entero sobre la curva eliptica (E). Pero todas estos son (como ya dijo Euler):

$$(p, s) = (0, 0), (1, 0), (-1, \pm 2), (-2, \pm 6).$$

Resumen del argumento de Heegner

Recensiones sobre el artículo de Heegner

Math. Reviews **14**, 1953, p. 725, by M. Ward (Pasadena, Calif.):

The author applies the transformation theory of modular forms for the case of singular moduli (complex multiplication) to obtain results on the solutions of various cubic and quartic diophantine equations in two variables. The solutions are usually in the rational field or the class field of the multiplication. Most of the equations considered are of the form $p(au^4 + b)$ or $p(cu^3 + d)$ equal to a square. Here p is a prime and a, b, c, d are small integers fixed by the complex multiplication being considered. The author proves in addition, by extending certain results of Weber on complex multiplication, that the only quadratic fields with negative discriminant and class number unity are the known classical cases.

Zentralblatt **49**, p. 162, by B. Schoeneberg (Hamburg):

Die Transformationstheorie der Modulformen und gewisse Ergebnisse Webers uber komplexe Multiplikation werden zur Lösung von diophantischen Gleichungen $f(x) = z^2$, wo $f(x)$ ein Polynom 3. oder 4. Grades ist, und zur Bestimmung aller imaginär-quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{d})$ mit der Klassenzahl $h = 1$ verwendet. Danach existieren keine anderen $R(\sqrt{d})$ mit $h = 1$ als die seit langem bekannten. Es sei jedoch bemerkt, dass die Beweise dem Ref. an mehreren Stellen unverständlich sind.

"las demostraciones son incomprensibles en algunos lugares."

El trabajo de Heegner no es reconocido hasta su muerte (1965). El sello se rompe sólo cuando un matemático profesional presenta una nueva solución del problema :

- 1967. El joven Harold Stark (Michigan) demuestra la completitud de la lista de los cuerpos con $h=1$, utilizando la fórmula analítica del número de clases y la fórmula de límite de Kronecker. Pero la ecuación (E) resurge en su prueba.
- 1968. Carl Ludwig Siegel (Göttingen) da una variante del argumento de Stark, con otras formas modulares.
- 1968. Brian Birch (Oxford) empieza su serie de artículos sobre los ***puntos de Heegner***. Justifica esencialmente el argumento dado por Heegner en 1952.
- 1968. Max Deuring (Göttingen) publica un análisis del argumento de Heegner: es correcto y esencialmente completo.
- 1969. Stark presenta su análisis del argumento de Heegner.
- 1970. Curt Meyer (Colonia) presenta su análisis del argumento, desde el punto de vista de la teoría algebraica de los numeros.