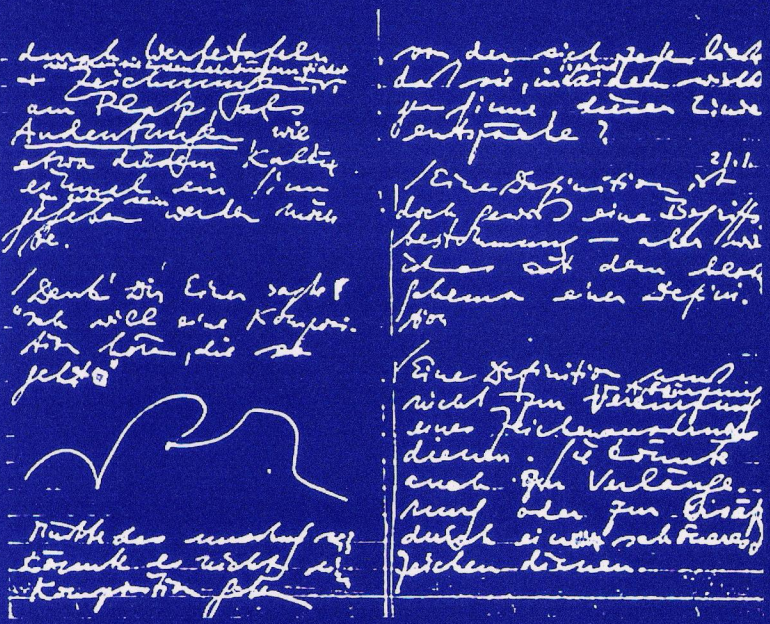
Matthias Kroß (Hrsg.)

»EIN NETZ VON NORMEN«
Wittgenstein und die Mathematik



PARERGA

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Gedruckt mit Unterstützung des Einstein Forums, Potsdam

Umschlagabbildung:
Ludwig Wittgenstein: »Mathematik und Logik F«, S. 32 f. (MS 127), Original der spiegelverkehrten Reproduktion in BGM 292.
(Quelle: Wittgenstein Archive, Cambridge)

Transskription Umschlagsabbildung

[p. 31, nicht reproduziert]: Wenn man sich den allgemeinen Funktionen Kalkül ohne die Existenz von Beispielen denkt, dann sind eben die vagen[gewellt unterstrichen] Erklärungen <wie man sie in den Lehrbüchern findet>

[p 32] durch Wertetafeln und Zeichnungen|, wie man sie in den Lehrbüchern findet,| am Platz, als Andeutungen, wie etwa diesem Kalkül einmal ein Sinn gegeben werden/zu geben sein/ möchte.
/ Denk Dir Einer sagte: »Ich will eine Komposition hören, die so geht:«
[Abbildung]
Müßte das unsinnig sein? Könnte es nicht eine Komposition geben

[p 33] von der sich zeigen ließe daß sie, in |irgend| einem wirklichen Sinne, dieser Linie entspräche?
21. 1. [1943]
/ Eine Definition ist doch gewiß eine Begriffsbestimmung — aber wie ist es mit dem bloßen Schema einer Definition
/ Eine Definition muß nicht zur Verneinung/Abkürzung/ eines Zeichenausdrucks dienen. Sie könnte auch zur Verlängerung oder zur Ersetzung durch <einen ...> ein schöneres Zeichen dienen

www.parerga.de

Erste Auflage 2008
© Parerga Verlag GmbH, Berlin
Alle Rechte vorbehalten – Printed in Germany
Satz und Umschlaggestaltung: work:*at*:BOOK / Martin Eberhardt, Berlin
Herstellung: buch bücher dd ag, Birkach
ISBN 978-3-937262-36-9

Inhalt

Vorwort 7

I. WITTGENSTEINS »BEMERKUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK«

Anja Weiberg
Rechnung versus Experiment. Mathematische Sätze als grammatische Sätze 17

Juliet Floyd
Wittgenstein über das Überraschende in der Mathematik 41

Michael Nedo
Anmerkungen zu Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. 79

II. WITTGENSTEIN IM KONTEXT DER MATHEMATISCHEN DISKUSSION

Felix Mühlhölzer
Wittgenstein und der Formalismus 107

Wolfgang Kienzler
Wittgensteins Anmerkungen zu Gödel. Eine Lektüre der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Teil I, Anhang III 149

Norbert Schappacher
Bemerkungen zu Wittgensteins Philosophie der Mathematik in ihrer Beziehung zur Mathematikgeschichte 199

Siglen der abgekürzt zitierten Werke Wittgensteins 235
Literaturverzeichnis 236
Zu den Autoren 245
Namenregister 249

Vorwort

I

Wittgensteins Beschäftigung mit der Mathematik reicht bis in die Anfänge seines Philosophierens zurück. Als angehender Ingenieur der Flugzeugtechnik war er seit seinen Semestern an der Technischen Hochschule Charlottenburg (1906–1908) und seiner Übersiedlung nach Manchester, um dort praktische Versuche in der Aeronautik anzustellen, sicherlich vor allem mit anwendungsbezogener Mathematik befasst. Die Studien mit Drachen und die Konstruktion eines neuartigen Antriebsmechanismus für Flugrotoren führten ihn jedoch bald zu einer intensiven Auseinandersetzung mit theoretischen und philosophischen Grundlagenaspekten der Mathematik. Ludwigs Schwester Hermine schildert den Vorgang in ihren *Familienerinnerungen* dramatisierend als eine Art Berufung. Entscheidend für diese Wende war wohl das Studium der Arbeiten von Bertrand Russell und Gottlob Frege. Wittgenstein erwähnt beide Autoren ausdrücklich im Vorwort zu seiner Frühschrift, der *Logisch-Philosophischen Abhandlung*. Die von diesen beiden Philosophen hergestellte Verbindung von Logik und Mathematik sollte für Wittgenstein – trotz aller tief greifenden Wandlungen seiner Auffassungen im Einzelnen – Zeit seines Lebens leitend bleiben: Stets ging es ihm in erster Linie darum, die (unausgesprochenen) Grundlagen und philosophischen Implikationen der mathematischen Tätigkeit zu erkunden, also, modern ausgedrückt, das »diskursive Fundament«, oder, traditionell formuliert, die »Logik« der mathematischen Praxis aufzudecken.[1]

Wittgensteins Interesse an der Mathematik galt also nur in sehr eingeschränktem Maße der *Lösung* »inner«-mathematischer bzw. fundierungslogischer oder gar systematischer Probleme. *Lösung* bedeutete für ihn im Wesentlichen deren *Auflösung*, also das, wie er in der *Abhandlung* formulierte, *Zum-Verschwinden-Bringen* von Problemen (vgl. T 6.521;

1 Vgl. zu den folgenden Überlegungen die Überblicksdarstellungen Gowers 2002 (Mathematik allgemein) und: Ramharter und Weiberg 2006 (Wittgenstein).

Hintikka Beispiel aufzugreifen: Wenn Clint Eastwood, der sich selbst spielt, sagt, dass sogar Clint Eastwood in einer solchen (vielleicht besonders rührenden) Situation lächeln würde, dann liegt der besondere Reiz für die Zuschauer darin, dass sie den Satz zugleich auf die Person des Schauspielers und auf die von ihm verkörperten Rollen beziehen können. (Entgegen Hintikkas Meinung würde man den Satz nicht auf den Privatmann C. Eastwood, sondern vermutlich hauptsächlich auf seine Rollen beziehen: »Selbst einer der harten Typen, wie sie Clint Eastwood häufig spielt, würde hier lächeln.«) Die interessante Analogie zu Gödels Beweis liegt nun gerade in dem Reiz, den die Unklarheit der Situation mit sich bringt: Der Satz scheint zugleich innerhalb und außerhalb eines bestimmten Systems gesprochen zu sein. So wie das spezifische Ineinander von Illusion und Realität im Film ein harmloses Vergnügen darstellt (gerade weil man beide Perspektiven miteinander ironisch verschmelzen und in der Schwebe halten kann; etwas was nur den Filmwissenschaftlern Klärungsaufgaben stellt), könnte man einen Satz wie denjenigen Gödels mit Wittgenstein als ein harmloses Vergnügen (wie Wittgensteins »Daumenfangen«) auffassen. Nur sollte man das Vergnügen am komplex Verspielten nicht automatisch mit einer besonders tiefen Einsicht gleichsetzen bevor man zu einer begrifflich klaren Analyse gekommen ist. (Ähnlich sollte man Eastwoods Satz vielleicht ebenfalls nicht zu tiefsinnig auffassen.)

Weiterhin würde man kaum ein solches Ausnahmebeispiel verwenden um die Natur und das Wesen des Theaters zu illustrieren, denn im Großen und Ganzen funktioniert Theater gerade nicht so, dass jemand sich selbst spielt. Entsprechend würde man Gödels Satz, wenn die Analogie einigermaßen treffend ist, eher nicht dazu heranziehen, um eine tiefe Aussage über die Logik und Mathematik insgesamt zu treffen, sondern man würde ihn als ein Beispiel verwenden um zu zeigen, was man in diesem Gebiet unter anderem auch noch an eher Kuriosem machen kann.[81]

Abgesehen von den spielerischen Möglichkeiten dieser Gedankengänge erinnert Hintikkas Darstellung nachhaltig daran, dass in diesem Bereich noch vieles an begrifflicher Klärungsarbeit zu leisten ist.

81 Eine weitere wichtige Unterscheidung, auf die Hintikka aufmerksam macht, ist die zwischen zwei Arten von Vollständigkeit, die er als beweistheoretische oder »deduktive« und modelltheoretische »deskriptive« Vollständigkeit (BGM 16f., 41)einführt, aber in seinem Vergleich mit dem Theater nicht unterbringt.

Norbert Schappacher

Bemerkungen zu Wittgensteins Philosophie der Mathematik in ihrer Beziehung zur Mathematikgeschichte[1]

In diesem Beitrag geht es um zwei sehr verschiedenartige Verknüpfungen Wittgensteins mit der Mathematikgeschichte. Der erste Teil beleuchtet die zunächst zufällige Beeinflussung von Wittgensteins Nachdenken über die Mathematik durch Veröffentlichungen des Mathematikers Hermann Weyl. Dieser Einfluss ist besonders 1928 und in den ersten darauf folgenden Jahren nachweisbar. Ich gehe einigen Textstellen nach, in denen sich dieser Einfluss zeigt, und dies ist auch das Hauptziel des ersten Teiles. Um den Einfluss genauer fassen zu können, werden aber auch, in den Abschnitten 1.5, 1.6, 1.7 und 1.9, die vier verschiedenen Phasen von Hermann Weyls Nachdenken über die Grundlagen der Mathematik rekapituliert. Was Wittgenstein von Weyl aufgreift, stammt teils aus der dritten, teils der zweiten Phase von Weyls Entwicklung. Die Berührungen der beiden Denker mögen insofern merkwürdig erscheinen, als die philosophischen Hintergründe von Weyl und Wittgenstein auf den ersten Blick durchaus unvereinbar sind. In der Tat suchte Hermann Weyl seine philosophische Grundorientierung seit dem Ersten Weltkrieg vor allem bei Meister Eckhart und Fichte. Im Hinblick auf die Mathematik und ihre physikalischen Anwendungen aber stand er auch moderneren Ansätzen wie z. B. dem Husserl'schen nahe, und das gedankliche Zusammentreffen von Weyl und Wittgenstein entstand anscheinend »am Objekt«, beim Nachdenken über die Praxis, genauer: über verschiedene Praxen der Mathematiker.

Im zweiten, kürzeren und freieren Teil plädiere ich dafür, Wittgensteins verifikationistische Sicht der Mathematik, die den Sinn eines mathematischen Satzes in seinem Beweis festmacht, als eine Methodologie für die Mathematikgeschichtsschreibung fruchtbar zu machen.

Während ich hoffe, im ersten Teil einen nützlichen kleinen Beitrag zum Verständnis der Denkanstösse zu liefern, die Wittgenstein beim Neubeginn seines Philosophierens empfing, soll der eher aphoristische

1 Den Teilnehmern des Potsdamer Roundtables danke ich herzlich für Anregungen und Tips während der mündlichen Diskussion vor Ort ebenso wie im Email-Austausch danach.

zweite Teil vor allem zum Nachdenken und auch zu Widerspruch anregen.

1. Hermann Weyl und Ludwig Wittgenstein

Anscheinend ist Ludwig Wittgenstein wesentlich durch den Besuch eines Vortrags von Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) am 10. März 1928 in Wien wieder zum Philosophieren angestoßen worden.[2] Brouwers Gedankengänge lassen sich aber im einzelnen kaum explizit in Wittgensteins Gesprächen oder Notizen aus jener Zeit nachweisen.[3] Dagegen spiegelt sich die Lektüre einiger Schriften Hermann Weyls (1885–1955) sowohl in expliziten Erwähnungen als auch in inhaltlichen Wiederaufnahmen mehrfach in Wittgensteins Äußerungen aus jener Zeit und zum Teil auch noch später.

1.1 Der bei Wittgenstein vielleicht langlebigste unter diesen auf Weyl zurückführbaren Gedanken, der außerdem in Wittgensteins Gesprächen mit Mitgliedern des Wiener Kreises explizit (WWK 81 f.) mit Weyls *Symposium*-Artikel von 1925 in Zusammenhang gebracht wird, ist die *Kritik der Existenzialurteile*. Bei Weyl lesen wir anlässlich der Erläuterungen von Brouwers Grundidee:[4]

> *Ein Existenzialsatz* – etwa »es gibt eine gerade Zahl« – *ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet*; Existenzial-Sachverhalte sind eine leere Erfindung der Logiker. »2 ist eine gerade Zahl«, das ist ein wirkliches, einem Sachverhalt Ausdruck gebendes Urteil; »es gibt eine gerade Zahl« ist nur ein aus diesem Urteil gewonnenes *Urteilsabstrakt*. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert liegt darin, dass es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen. [...]
>
> An den vielen Existenztheoremen der Mathematik ist jeweils nicht das Theorem das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion; ohne sie ist der Satz ein wertloser Schatten. (Weyl 1925, 529 f.)

Diese Problematisierung der Existenzialurteile (über einen unendlichen Bereich) wird ein zentraler Punkt von Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Einige seiner ersten Äußerungen hierzu werden im weiteren Verlauf unserer Erörterungen noch eine Rolle spielen. Um aber gleich die Langlebigkeit dieses Gedankens bei Wittgenstein zu belegen, sei hier auf BGM V (1942–1944) verwiesen, wo es in einer Diskussion des von den Mathematikern so genannten »Fundamentalsatzes der Algebra«[5] heißt:

> Wenn ein Beweis allgemein beweist, *es gebe* eine Wurzel, so kommt alles darauf an, in welcher Form er das beweist. Was es ist, das hier zu diesem Wortausdruck führt, der ein bloßer Schemen ist und die *Hauptsache* verschweigt. Während er den Logikern nur die Nebensache zu verschweigen scheint. (BGM V, §25, 282)

Der Fundamentalsatz der Algebra als Beispiel für die Problematik von Existenzialurteilen und deren Beweisen ist von 1928 an bei Wittgenstein präsent (siehe das entsprechende Zitat in 1.10 unten). Auch Weyl bediente sich 1928 desselben Theorems als Beispiel, freilich in einem ausdrücklich intuitionistischen Argumentationsrahmen (die Koeffizienten der Polynome sind durch Wahlfolgen gegeben); jedoch ist unklar, ob Wittgenstein diese Stelle kannte.[6]

2 Eine knappe Zusammenfassung der diesbezüglichen Thesen und Dokumente findet sich z. B. in Hesseling 2003, 190 ff.

3 Vgl. dazu wieder Hesseling 2003. Brouwers Vorträge wurden erst etwas später veröffentlicht, vgl. Brouwer 1929 und 1930.

4 In einer Fußnote zur hier zitierten Passage (Weyl 1968b, 529, Fußnote 2) betont Weyl ausdrücklich: »Was ich hier darstelle, ist nicht eine getreue Wiedergabe des Brouwer'schen, sondern desjenigen Standpunktes, der sich mir als der natürliche ergab, als ich von den Brouwerschen Ideen ergriffen wurde.«

5 Dieser Satz (der seinem Namen zum Trotz mit reinen Mitteln der Algebra nicht bewiesen werden kann, weil er vom Begriff der reellen und komplexen Zahl abhängt) wird heute meistens so formuliert, dass jedes Polynom: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ von beliebigem Grade $n > 0$, mit komplexen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ als Koeffizienten, mindestens eine (und mit Vielfachheiten gezählt genau n) Nullstellen (oder, wie Wittgenstein hier sagt, »Wurzeln«) hat. Vgl. auch 2.1 unten.

6 Siehe Weyl 1928, 148: »Denn in den meisten Fällen liegt die Schwierigkeit nicht so sehr in der Auffindung des finiten Beweises als darin, die Sätze der klassischen Mathematik überhaupt durch reale, für den Intuitionisten akzeptable Urteile auszufüllen. Um dies z. B. für den Fundamentalsatz der Algebra von der Wurzelexi-

Während Weyl Brouwers Idee der freiwerdenden Wahlfolge auch im Zusammenhang mit der oben zitierten Ausführung über Existenztheoreme erläutert, erntet diese bei Wittgenstein zunächst nur eine kurze, grundsätzliche Kritik[7] und wird später kaum mehr thematisiert.

1.2 In WWK diskutiert Wittgenstein die Schachspielmetapher für die Mathematik mit direktem Verweis auf deren Darstellung in Weyls *Symposium*-Artikel:

> Ich habe darüber nachgedacht, was Weyl wohl meinen kann, wenn er sagt, der Formalismus fasse die Axiome der Mathematik wie die Regeln des Schachspiels auf. Ich möchte sagen: Nicht nur die Axiome der Mathematik, sondern alle Syntax ist willkürlich. (WWK 103)

In den Diskussionen während des Potsdamer Workshops wurde zurecht auf die Bedeutung dieser Metapher für Wittgensteins Nachdenken über Freges Auseinandersetzung mit Thomae hingewiesen.[8] In der zitierten Stelle jedoch spielt Wittgenstein offensichtlich auf Weyls *Symposium*-Artikel an, wo es heißt:

> Die Sätze werden zu bedeutungslosen, aus Zeichen aufgebauten Figuren, die Mathematik ist nicht mehr Erkenntnis, sondern ein durch gewisse Konventionen geregeltes *Formelspiel*, durchaus vergleichbar dem Schachspiel. Den Steinen des Schachspiels entspricht ein beschränkter Vorrat an *Zeichen* in der Mathematik, einer beliebigen Aufstellung der Steine auf dem Brett die Zusammenstellung der Zeichen zu einer *Formel*. Eine oder wenige Formeln gelten als *Axiome*; ihr Gegenstück ist die vorgeschriebene Aufstellung der Steine zu Beginn der Schachpartie. Und wie hier aus einer im Spiel auftretenden Stellung die nächste hervorgeht, indem ein Zug gemacht wird, der bestimmten Zugregeln zu genügen hat, so gelten dort formale *Schlußregeln*, nach denen aus Formeln neue Formeln gewonnen, »deduziert« werden können. (Weyl 1925, 535)

Und Wittgenstein reagiert besonders darauf, dass Weyl das Deduzieren aus den Axiomen nicht ausdrücklich in die Beliebigkeit des Formelspiels mit einzubeziehen, sondern der allgemein gegebenen Logik zuzuschlagen scheint.

Als interessantes Beispiel *impliziter* Bezugnahme Wittgensteins auf Weyl werden wir als nächstes einige Absätze aus *Philosophische Bemerkungen* XVI betrachten. Dieser Abschnitt hebt mit der Fragestellung an: »Wie zeigt es sich, dass der Raum keine Kollektion von Punkten, sondern die Realisierung eines Gesetzes ist?« (PB § 177, 216): Jedenfalls die erste, verneinte Alternative in dieser Frage ist Weyls Kritik am »atomistischen« Kontinuum durchaus gemäß (vgl. Abschnitt 1.7 unten). Die Absätze von *Philosophische Bemerkungen* XVI kreisen um das Verhältnis zwischen dem Raum (insbesondere dem eindimensionalen Raum, d. h. der Geraden) wie er in der Physik, der Geometrie und der arithmetisierten Mathematik theoretisiert wird. Zum Verständnis der Problematik, auf die sich diese Passage bezieht, hier ein *Exkurs über Arithmetisierung*:

1.3 Der arithmetisierte Aufbau des Kontinuums, wie er insbesondere durch Georg Cantor,[9] Richard Dedekind[10] und andere historisch eingeführt und später insbesondere von Weyl kritisiert wurde, markiert mathematikhistorisch *das Ende der Größenlehre* (vgl. Epple 2000a). Seit Newton (1673) waren Zahlen im allgemeinen als Verhältnisse von Größen gefasst worden, wodurch die ganze damalige Mathematik, auch die Analysis, auf Geometrie gegründet war. Die Entdeckung nicht-Euklidischer Geometrien im 19. Jahrhundert erschütterte die Vertrauenswürdigkeit der Geometrie als fundamentaler mathematischer Disziplin. So wird verständlich, warum nach dem deutsch-französischen Krieg in kurzer Folge verschiedene Mathematiker, insbesondere Georg Cantor (1845–1918), Richard Dedekind (1831–1916), Heinrich Eduard Heine (1821–1881), Ernst Kossak (1839–1892) (nach Karl Weierstraß [1815–1897])

stenz zu leisten, muß man die *finite Konstruktion* angeben, vermöge deren die von Schritt zu Schritt sich genauer bestimmenden Koeffizienten einen analogen Entwicklungsprozeß der Wurzelwerte auslösen.«

7 WWK 83: »Eine freiwerdende Wahlfolge ist zunächst etwas Empirisches. [... W]enn Weyl glaubt, es sei deshalb ein mathematisches Gebilde, weil ich aus einer Wahlfolge eine andere ableiten kann, durch ein allgemeines Gesetz, z. B. [aus] m_1 m_2, m_3, ... [die neue Folge] m_1, m_1+m_2, m_1+m_3, ... so ist dagegen zu sagen: Nein, damit ist nur gezeigt, daß ich Zahlen addieren kann, nicht aber, daß die Wahlfolge ein erlaubter mathematischer Begriff ist.«

8 Vgl. Kienzler 1997, 199 f. sowie, zum Weyl-Zitat, 313 f., Endnote 110. Hier weist Kienzler auf Wittgensteins leichte Verzerrung der Weyl-Stelle hin.

9 Mittels Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, zuerst dargestellt in Cantor 1872.

10 Mit den sogenannten Dedekind'schen Schnitten, zuerst dargestellt in Dedekind 1872.

in Deutschland und auch der isoliert in Dijon wirkende Charles Méray (1835–1911), verschiedene neue Begründungsversuche des Zahlkontinuums vorlegten, denen allen eines gemeinsam war: Das Kontinuum wird als Gesamtheit aller reellen Zahlen, und jede relle Zahl durch unendliche Mengen rationaler Zahlen, d. h. durch unendliche Mengen von Brüchen ganzer Zahlen, definiert. Dadurch wurde zwar die gesamte Mathematik, einschließlich der Analysis, mit einziger Ausnahme der klassischen Euklidischen Geometrie, letztlich auf den Begriff der ganzen Zahl gegründet (das macht den Ausdruck »Arithmetisierung« immerhin plausibel). Aber dies geschah um den Preis, dass man das freie Hantieren mit unendlichen Mengen ganzer und rationaler Zahlen zulassen musste; denn eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ wurde nun eben nicht mehr als Länge der Diagonale im Quadrat der Seitenlänge 1 bestimmt, sondern (etwa bei Cantor) durch eine Folge sukzessiver Approximationen mit rationalen Zahlen, oder (etwa bei Dedekind) durch die Menge aller negativen und aller derjenigen Brüche, deren Quadrate kleiner als 2 sind.

Bedenkt man diesen damals so freigebig gezahlten Preis für die neue Begründung des Kontinuums genauer, so leuchtet ein, warum mindestens einer jener Gründerväter, Georg Cantor, die Mengenlehre, insbesondere die Theorie unendlicher Zahlenmengen, systematisch entwickelte. Wichtige Wegmarken dieser Kreation waren Cantors zwei Beweise der Überabzählbarkeit des Kontinuums 1874 bzw. 1890, der letztere mit dem berühmten Diagonalschluss.

Der gezahlte Preis stellte sich bald als sehr hoch heraus. Nach der Jahrhundertwende drehten sich viele Diskussionen um verschiedene Antinomien in der Cantor'schen Mengenlehre. 1905 formulierte etwa der französische Mathematikphilosoph Jules Antoine Richard (1862–1956) die noch heute nach ihm benannte Antinomie, die darin besteht, dass die Menge aller durch endlich viele Worte definierbaren reellen Zahlen abzählbar ist – wir können ja überhaupt nur über Dinge reden, die durch endlich viele Worte ausdrückbar sind –; aber nach Cantor ist die Gesamtheit aller reellen Zahlen nicht abzählbar; wir könnten also nicht über alle reellen Zahlen reden.

Im April 1909 hielt Henri Poincaré (1854–1912) in Göttingen sechs von der Wolfskehl-Stiftung finanzierte Vorträge, dessen fünfter: *Über transfinite Zahlen*, Richards Antinomie scharfsinnig mit Hilfe des Begriffs der *imprädikativen Definition* analysierte (Poincaré 1910). Sein Punkt war dieser: Um die Überabzählbarkeit des Kontinuums zu beweisen, hatte Cantor annehmen müssen, es gebe eine Abzählung, und er benutzte dieses Datum, um einen Widerspruch zu bekommen. Man musste also Informationen über die Gesamtheit aller reeller Zahlen ausnützen, die mit deren Konstruktion selbst nicht gegeben sind. Hieran wird Weyl in seiner ersten Beschäftigung mit den Grundlagen der Mathematik, noch vor dem Ersten Weltkrieg, anknüpfen (siehe 1.5 unten).

1.4 Die am Anfang von 1.3 zitierten Arbeiten von Dedekind bzw. Cantor zeichnen sich vor anderen Gründungstexten der Arithmetisierung dadurch aus (vgl. Petri und Schappacher 2007), dass sie den axiomatischen (im Sinne von postulatorischen, unbeweisbaren) Charakter der Forderung betonen, Punkte der Geraden (bzw. des Raumes) entsprächen eins zu eins den in arithmetischer Weise aufgefassten reellen Zahlen (bzw. Zahlentripeln). Wittgenstein bezieht sich konkret – schlichter als Dedekind oder Cantor, aber in Übereinstimmung mit Weyls *Symposium*-Artikel (Weyl 1925, 531) – auf die Angabe einer Zahl bzw. eines Punktes durch einen (unendlich fortschreitenden) Dualbruch, oder durch sukzessive Intervallschachtelung und problematisiert vor allem die Unendlichkeit dieser beiden Prozesse. Auch er denkt über das Verhältnis von Zahlen zu Punkten nach; aber eine postulatorische »Lösung« à la Dedekind oder Cantor ist seinen Fragen natürlich nicht gemäß. Keiner mathematischen Analyse wird erlaubt, sich zwischen ihn und die geometrischen Daten zu stellen.

Ist vielmehr ein Punkt auf einer Strecke gegeben – und zwar durch seine geometrische Position, nicht in arithmetischer Weise –, so kann ich mich ihm

> durch fortgesetzte Bisektion unbegrenzt nähern und mit unendlich feinen Augen und Werkzeugen wäre *jeder* Schritt der Bisektion bestimmt. (Die unendliche Schärfe der Augen gibt keinen circulus vitiosus.) [...]
>
> Das geometrische Verfahren enthält keinen circulus vitiosus, weil in ihm nur die unendliche Möglichkeit vorausgesetzt wird, keine unendliche Wirklichkeit. (PB § 179, 219)

Hier ist ein Bezug zu Weyl deshalb so gut wie sicher, weil dieser wohl am eindringlichsten seit dem Weltkrieg die imprädikative Definition eines Punktes im arithmetischen Kontinuum durch beliebiges Quantifizieren über Eigenschaften (oder Mengen) von rationalen Zahlen als *circulus vitiosus* brandmarkte.[11] Diese Wortwahl Weyls war recht idio-

11 Felix Mühlhölzer machte mich darauf aufmerksam, dass – obgleich der Bezug zu Weyl jedenfalls als sicher gelten kann – es nicht klar ist, aus welcher Schrift oder

synkratisch,[12] insofern es nicht um eine zirkuläre Argumentation geht, sondern um die Imprädikativität gewisser Definitionen.[13] Als Beleg sei z. B. der offenbar von seiner damaligen Fichtelektüre geprägte Appell Weyls an den Leser in dem Büchlein *Das Kontinuum* zitiert:

> Der durch die nebelhafte Natur des üblichen Mengen- und Funktionsbegriffes verhüllte circulus vitiosus, auf den wir hinweisen, ist nicht etwa ein leicht zu beseitigender formaler Fehler im Aufbau der Analysis. Die Erkenntnis seiner fundamentalen Bedeutung ist etwas, was sich nun eben nicht durch viele Worte an den Leser heranbringen lässt. Je deutlicher man sich aber das logische Gewebe der Analysis zur Gegebenheit bringt, je tiefer und vollständiger der Bewusstseinsblick es durchschaut, um so klarer wird es, daß bei der heutigen Begründungsweise sozusagen jede Zelle des gewaltigen Organismus von diesem Gift des Widerspruchs durchsetzt ist; und daß eine durchgreifende Kontrolle nötig ist, um hier Abhilfe zu schaffen. (Weyl 1918a, 23; vgl. auch 1.5 unten)

Als konkrete Erläuterung dessen, was Weyl in diesem Zusammenhang für einen *circulus vitiosus* hält, sei Weyls eigenes Standardbeispiel angeführt: die imprädikative Definition der oberen Grenze einer Menge reeller Zahlen. So heißt es z. B. in einem 1919 veröffentlichten Antwortbrief Weyls an Otto Hölder, der genau nach diesem Zirkel gefragt hatte:

> Eine reelle Zahl ist eine Menge rationaler, die einer bestimmten Eigenschaft rationaler Zahlen korrespondiert. Eine Menge reeller Zahlen entspricht also einer Eigenschaft *A* von Eigenschaften rationaler Zahlen. Die obere Grenze dieser Menge reeller Zahlen ist selbst die Menge derjenigen rationalen Zahlen *x*, welche eine gewisse Eigenschaft E_A besitzen, nämlich die folgende: daß es *eine Eigenschaft der Art A gibt*, welche der Zahl *x* zukommt. Eine solche Erklärung [...] ist *evident sinnlos*; der Begriff »Eigenschaft rationaler Zahlen« ist nicht umfangsdefinit. (Weyl 1919, 45)

Und diese älteren Passagen nimmt Weyl auch in seinem, wie wir wissen, von Wittgenstein rezipierten *Symposium*-Artikel wieder auf, verknüpft sie dort mit einem Hinweis auf den Russell'schen Ansatz der Typentheorie[14] und akzentuiert die Problematisierung der Existenzialurteile, die wir schon in 1.1 gesehen haben, stärker als in früheren Schriften:

> Nicht jeder »inhalts-definite«, das heißt exakt und eindeutig festgelegte Begriff b braucht *umfangs-definit* zu sein; insbesondere ist der Begriff »Eigenschaft natürlicher Zahlen« nicht von dieser Art. b ist umfangs-definit, das besagt: es hat nicht nur für einen beliebigen unter den Begriff b fallenden Gegenstand *X* und irgendeine im Bereich dieser Gegenstände definierte Eigenschaft A die Frage »Hat *X* die Eigenschaft A?« einen präzisen Sinn, dem ein an sich gültiger Sachverhalt als Antwort gegenübersteht, sondern auch die *Existenzfrage: »Gibt es* einen unter b fallenden Gegenstand mit der Eigenschaft A« [...]. Für die natürlichen Zahlen haben wir als einzige [...] Grundrelation die, welche zwischen einer willkürlichen Zahl und der nächstfolgenden besteht. Aus ihnen kann man logisch-konstruktiv neue Eigenschaften und Relationen gewinnen, wobei aber die Termini »alle« und »es gibt« nur auf die Gegenstände der Grundkategorie angewendet werden. [...] Diese Eigenschaften bilden die niederste Stufe. Eigenschaften

welchen Schriften Weyls Wittgenstein den Ausdruck »circulus vitiosus« entlehnt. Er kommt im *Symposium*-Artikel vor (vgl. Weyl 1925, 524, vgl. auch 526: »Zirkel ohne Ende«). Andererseits wies mich Mühlhölzer auf die Erwähnung von Weyl (1927) in WWK 37, Fn. hin. In diesem Buch wird der »circulus vitiosus« im Kontext der oberen Grenze am Ende von §8 erwähnt.

12 In seiner eigenen Schilderung seiner gedanklichen Entwicklung in diesen Dingen bis 1918 gab Weyl zu Protokoll, dass er die Schriften Freges und Russells erst kennen lernte, als er sich die Sachen selbst schon zurechtgelegt hatte. Dies schließt freilich nicht völlig aus, dass seine Ausdrucksweise von Russells »vicious circle principle«, das auf Seite 36 oben erwähnt ist, beeinflusst war (Weyl 1918a, 35)

13 Vgl. z. B. Mancosus Seufzer: »[...] But this is a far cry from pointing out a vicious circle in the foundations.« in Mancosu 1998, 75.

14 Siehe freilich auch H. Weyl 1918a, Kap. I, § 8, S. 29 ff. für genauere Ausführungen Weyls zur »Stufentheorie«. In diesem Kontext fällt bei Weyl auch 1918 die Redeweise von den »einschlägigen Urteilen« (ebd. 32), die Wittgenstein in WWK 37, offenbar in Bezug auf eine andere Stelle bei Weyl, kritisiert: »Alles kommt auf dasselbe Wort ›einschlägig‹ an. Für Weyl ist eine Aussage einschlägig, die aus gewissen Grundformeln mit Zuhilfenahme von sieben Kombinations-Prinzipien (darunter ›alle‹ und ›es gibt‹) aufgebaut ist. Hier liegt der Fehler. Eine Aussage ist einschlägig, wenn sie einem *bestimmten System* angehört [...] Was nicht sichtbar einschlägig ist, ist überhaupt nicht einschlägig.« Eine solche Kritik schließt aber enge Berührungspunkte von Wittgenstein mit Weyl in diesem Fragenkreis nicht aus.

> der 2. Stufe gewinnt man, indem man »es gibt« und »alle« auch anwendet auf den umfangs-definiten Kreis der Eigenschaften 1. Stufe, ... usf. Die Notwendigkeit dieser Stufenbildung ist zuerst von Russell klar erkannt worden. Unterdrückte man sie, bezöge das »es gibt« und »alle« uneingeschränkt auf Eigenschaften überhaupt, so verstrickte man sich in Zirkel ohne Ende. Damit drängen nun aber die Konsequenzen der Antinomien bis in den Kern der Analysis vor. Denn die Konstruktion der oberen Grenze einer Menge A von reellen Zahlen verlief genau [...] unter Mißachtung der Russellschen Stufen. Man hat nur zu bedenken, daß nach Dedekind eine reelle Zahl *(E)* eine Menge rationaler Zahlen ist, welche ihrerseits einer Eigenschaft *E* im Gebiete der rationalen Zahlen korrespondiert; »die rationale Zahl *x* ist kleiner als *(E)*« besagt so viel wie: *x* hat die Eigenschaft *E*. Die obere Grenze g korrespondiert dann in der Tat derjenigen Eigenschaft E_A, die eine rationale Zahl *x* dann und nur dann besitzt, wenn es überhaupt eine Eigenschaft rationaler Zahlen von der Art *A gibt*, welche dem *x* zukommt. (Weyl 1925, 525 f.)

Kehren wir nun von Weyl zu Teil XVI der *Philosophische Bemerkungen* Wittgensteins zurück, in dem dieser das Verhältnis der oben zitierten geometrisch gegebenen Punkte, die eine potentiell beliebig genaue arithmetische Eingrenzung einer reellen Zahl liefern, zu den rein arithmetisch gegebenen Punkten erwägt, die einer arithmetischen Vorschrift, dem Bildungsgesetz einer approximierenden Folge entsprechen. Ganz am Ende dieses Teils ist eine Anspielung Wittgensteins auf die Weyl'sche Problematisierung der oberen Grenze greifbar:

> Es ist schon möglich, daß ich bei der Bestimmung eines Maximums auf eine neue Vorschrift stoße, aber diese hat nichts Wesentliches mit der Bestimmung des Maximums zu tun; sie bezieht sich nicht ausdrücklich auf eine Gesamtheit von reellen Zahlen. (PB § 180, 222)[15]

15 Ich nehme an, mit »Maximum« meint Wittgenstein in diesem Satz die obere Grenze einer Menge, also das, was man heute lieber als das Supremum dieser Menge bezeichnet. (Sollte statt dessen, obwohl auch der Zusammenhang nicht darauf hindeutet, etwa das Maximum einer Funktion gemeint sein, so könnte man auch dies als eine obere Grenze auffassen.)

Der letzte Teil des Satzes macht deutlich, dass das »Maximum« als reelle Zahl zunächst nur imprädikativ, unter Rekurs auf eine Menge reeller Zahlen, definiert ist. Demnach betrachtete Wittgenstein in diesem Satz die Situation, wo sich eine zunächst nur als Supremum einer Menge bestimmte Zahl als eine solche Irrationalzahl (wie z. B. $\sqrt{2}$ in unserem Beispiel in 1.3) entpuppt, welche direkt prädikativ durch eine Menge rationaler Zahlen bestimmt werden kann.

Bekanntlich *postulierte* Russells »Axiom of Reducibility«, dass diese Situation *stets*, d. h. für *alle* zunächst mit höherstufigen Quantoren definierten reellen Zahlen, eintritt. Dieses Postulat wurde von Weyl als ein »recht abstruser Ausweg« vehement abgelehnt, für dessen Nachweisbarkeit »nicht das leiseste Anzeichen« vorliege.[16] Dass die eben zitierte Stelle der *Philosophische Bemerkungen* diesem Kontext angehört, wird auch durch den vorhergehenden Absatz belegt, der in PB § 180, 222 einfach lautet: »Beim Approximieren durch fortgesetzte Zweiteilung nähert man sich *jedem* Punkt durch *rationale* Zahlen. Es gibt keinen Punkt dem man sich nur mit irrationalen Zahlen einer bestimmten Type nähern könnte.«

In Wittgensteins Nachlass (MS 106, 72) folgt in der Tat auf diese beiden Sätze unmittelbar die Frage: »Ist das nicht ein axiom of reducibility?«[17]

So ergibt sich – ähnlich wie in 1.1 in Bezug auf Existenzialurteile – auch hier, bei der Diskussion der imprädikativen Definitionen, eine Konstellation zwischen Weyl und Wittgenstein, in der sich beide mit verwandten Formulierungen in der Analyse gewisser mathematischer Praktiken oder Überzeugungen treffen. Das bedeutet aber natürlich weder, dass sie dieselben philosophischen Beweggründe teilen, noch dass ihre Analyse dieser Praktiken denselben Weg geht und zu denselben Ergebnissen führt. Um den Unterschied zu verdeutlichen, mag das folgende Zitat hilfreich sein:

16 Siehe Weyl 1925, 526; siehe auch Weyl 1918a, 36. Eine im Ergebnis ähnliche postulatorische Auflösung des Problems der imprädikativen Definitionen wurde von Ramsey 1926 vertreten.

17 Ich verdanke Anja Weiberg den Hinweis auf diese und andere Stellen aus Wittgensteins Nachlass. So auch auf den folgenden eher skeptischen Kommentar zu Russells Axiom, aus dem *Prototractatus* 6.1142: »... Sätze wie Russells Axiom of reducibility sind nicht logische Sätze, und dies erklärt unser Gefühl, nämlich, dass sie, wenn wahr, so doch nur durch einen günstigen Zufall wahr sein könnten.« (MS 104)

> Es ist ein merkwürdiger Irrtum der Mathematiker, dass manche von ihnen glauben, daß durch eine Kritik der Grundlagen etwas *in* der Mathematik fortfallen könnte. Ein Teil der Mathematiker hat den ganz richtigen Instinkt: was wir einmal *gerechnet* haben, kann doch nicht fortfallen und verschwinden! In der Tat, das, was durch die Kritik zum Verschwinden gebracht wird, das sind die Namen, die Anspielungen, die im Kalkül vorkommen, also das, was ich die *Prosa* nennen möchte. Es ist sehr wichtig, zwischen dem Kalkül und dieser Prosa auf das strengste zu unterscheiden. Hat man diese Scheidung einmal klar gemacht, so fallen alle diese Fragen wie die nach Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit etc. weg. (WWK 149)

Im Sinne des Zitats teilte Weyl diesen »merkwürdigen Irrtum der Mathematiker«; denn mindestens zu gewissen Zeiten seiner Laufbahn wollte er die imprädikativen Definitionen aus der Analysis verbannen.[18]

Um dem Unterschied in Herkunft und Vorgehensweise zwischen Weyl und Wittgenstein noch mehr Relief zu geben, werden wir jetzt kurz *die philosophische Entwicklung Hermann Weyls* im Hinblick auf die Grundlagen der mathematischen Analysis nachzeichnen.

1.5 *Weyl I.* Hermann Weyl, zu der Zeit Hilberts Assistent in Göttingen, hörte Poincarés oben (in 1.3) erwähnten Vortrag und dachte in derselben Richtung weiter. In einem Brief Hermann Weyls an seinen holländischen Freund Piet Mulder vom 29.7.1910 heißt es:

> In letzter Zeit habe ich viel über die Grundlagen der Mengenlehre nachgedacht und komme da zu Ansichten, die von den Zermeloschen ziemlich stark abweichen und sich im gewissen Sinne dem hier viel verspotteten Borel-Poincaré'schen Standpunkt nähern.[19]

18 Siehe etwas genauer 1.6 unten. Nur eher rhetorisch räumte Weyl (1918a) in einer Fußnote auf Seite 24 ein: »in der Wissenschaft gibt es nur ›Gesetze‹, keine ›Gebote‹. So soll denn auch hier nicht etwa ›verboten‹ werden, den Terminus ›es gibt‹ in Verbindung mit Gegenständen zu gebrauchen, die nicht zu den Grundkategorien gehören. [...] tut man es, so tue man es aber in zirkelfreier Weise!«

19 Ich danke Dirk van Dalen für die Mitteilung dieses Zitats. Emile Borel, der von Hesseling 2003, 8ff. unter die frühen französischen »Semi-Intuitionisten« eingereiht wird, hatte z. B. 1908 einen Aufsatz mit dem Titel »Les ›Paradoxes‹ de la théorie des ensembles« veröffentlicht, in dem er die Annahme ablehnte, jede abzählbare Menge könne tatsächlich aufgezählt werden (Borel 1908).

Weyls Habilitationsvortrag aus demselben Jahre (*Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*) enthält, wie nach der eben zitierten Briefstelle nicht anders zu erwarten, Ansätze einer kritischen Betrachtung der Definitionen im Rahmen der Mengenlehre. So präzisierte Weyl schon damals die übliche (von Zermelo eingeführte) Axiomatik der Mengenlehre durch einen scharfen Begriff der *Definierbarkeit über einer relationalen Struktur* (wie die heutigen Logiker sagen). Damit war er, wie Solomon Feferman betont hat, (vgl. Feferman 2000, 180 und Feferman 1998), der Entwicklung der mathematischen Logik in diesem Punkte ca. 20 Jahre voraus. Aber diese Kritik präsentierte sich 1910 lediglich als eine technisch-logische Detailfrage. Der Tenor, in dem Weyl seinen Vortrag damals ausklingen ließ, war allgemeiner und zielte in eine andere Richtung, die für die hier betrachtete erste Phase in Weyls Entwicklung charakteristisch ist:

> Darf man sagen, was nach dem bisher Ausgeführten naheliegt, Mathematik sei die Wissenschaft vom ε und denjenigen Beziehungen, die sich auf Grund dieses Begriffes mittels der erwähnten Prinzipe definieren lassen? Vielleicht wird durch eine solche Erklärung die Mathematik *ihrem logischen Gehalt* nach in der Tat zutreffend bestimmt. Trotzdem erblicke ich den eigentlichen Wert und die eigentliche Bedeutung des so zustande kommenden Begriffssystems einer logisierten Mathematik doch darin, daß sich ihre Begriffe auch, ohne daß dabei die Wahrheit der auf sie bezüglichen Sätze Schaden leidet, *anschauungsmäßig* deuten lassen, und ich glaube, der menschliche Geist kann auf keinem anderen Wege als durch Verarbeitung der gegebenen Wirklichkeit zu den mathematischen Begriffen aufsteigen. (Weyl 1910, 304)

Demnach empfand Weyl eine akute Spannung zwischen dem als unerlässlich und im Grunde zuverlässig anerkannten modernen Apparat der Mathematik, wie er sich z. B. in der Mengenlehre zeigte, und dem traditionellen, inhaltsgeladenen, ganzheitlichen Bild der Mathematik, das durch die modernen Beweismethoden verdeckt zu werden drohte. Weyl bemühte sich in dieser ersten Phase immer wieder darum, seine Leser vor dem Missverständnis zu warnen, der mathematische Kalkül sei das Wesen des in der Mathematik zu Vermittelnden. So entwickelte er zu jener Zeit mit großer Emphase eine Art *Vorwort-Holismus*, z. B. im Vorwort zu seinem erstem Lehrbuch (es war ein reines Mathematikbuch jenseits der Grundlagenfragen), das sofort ein Klassiker wurde:

> Es kann nicht geleugnet werden: die Entdeckung der sich weit über alle unsere Vorstellungen hinausspannenden Allgemeinheit solcher Begriffe wie »Funktion«, »Kurve« usw. auf der einen Seite, das Bedürfnis nach logischer Strenge auf der anderen, so ersprießlich, ja notwendig sie für unsere Wissenschaft waren, haben in der Entwicklung der Mathematik von heute doch auch ungesunde Erscheinungen hervorgerufen. Ein Teil derjenigen mathematischen Produktion, die sich müht, diesen Begriffen bis in ihre letzten Feinheiten und – Verzerrungen nachzugehen oder sie in ihren weitesten Umrissen zu erfassen trachtet, hat, sich im Leeren verflüchtigend oder in Seitengängen versickernd, den Zusammenhang mit dem lebendigen Strom der Wissenschaft verloren. Auch die Idee der Riemann'schen Fläche erheischt, wenn wir den rigorosen Forderungen der Moderne in bezug auf Exaktheit gerecht werden wollen, zu ihrer Darstellung eine Fülle von abstrakten und subtilen Begriffen und Überlegungen. Aber es gilt nur den Blick ein wenig zu schärfen, um zu erkennen, daß hier dieses ganze vielmaschige logische Gespinst (in dem sich der Anfänger vielleicht verheddern wird) nicht das ist, worauf es im Grunde ankommt: es ist nur das *Netz*, mit dem wir die *eigentliche Idee*, die ihrem Wesen nach einfach und groß und göttlich ist, aus dem *topos atopos*, wie Plato sagt, – gleich einer Perle aus dem Meere – an die Oberfläche unserer Verstandeswelt heraufholen. Den Kern aber, den dieses Knüpfwerk von feinen und peinlichen Begriffen umhüllt, zu erfassen, – das, was das Leben, den wahren Gehalt, den inneren Wert der Theorie ausmacht – dazu kann ein Buch (und kann selbst ein Lehrer) nur dürftige Fingerzeige geben; hier muß jeder einzelne von neuem für sich um das Verständnis ringen. (Weyl 1913, Vorwort) [20]

Weyl weigerte sich, die Moderne als Sinn-Doktrin zu übernehmen. Andererseits war er Mathematiker und schätzte und entwickelte die raffiniertesten modernen Methoden, mindestens als *tool box*. Die zitierte Stelle aus dem Vorwort dokumentiert die große Kluft, die Weyl und Wittgenstein beim Nachdenken über die Mathematik trennt; für Wittgenstein, der das Wesentliche der Mathematik im *Kalkül* sah, wäre dieses Zitat *Prosa* der schlimmsten Sorte über Mathematik gewesen.[21]

20 Das Vorwort datiert auf den April 1913.

21 Ich danke Felix Mühlhölzer für diese Anmerkung. Vgl. Abschnitt 2.4 unten.

1.6 *Weyl II.*[22] Im Sommer 1913 erhielt Weyl einen Ruf an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich; im September desselben Jahres heiratete er Helene Joseph, genannt Hella oder Leni. Sie war eine Studentin des Philosophen Edmund Husserl in Göttingen gewesen, für den sich auch Weyl interessierte. Obwohl die Weyls den Krieg zunächst von der neutralen Schweiz aus erlebten, lenkten die Nachrichten Weyl erheblich von der mathematischen Arbeit ab, die er als weit entfernt von den großen Fragen der Zeit wahrnahm. Als untauglich gemustert und als Professor im Ausland wurde er zunächst nicht von militärischen Verpflichtungen behelligt. Am 11. Mai 1915 zog man ihn aber doch ein. Er wurde bei Saarbrücken stationiert; seine Frau folgte ihm bald mit dem wenige Monate alten Sohn. Nach einem knappen Jahr erreichten die Schweizer Behörden seine Entlassung aus der deutschen Armee, und die Weyls konnten im April 1916 nach Zürich zurückkehren.

Hermann Weyl beschrieb sein Denken danach als eine *tabula rasa*. So nahm er seine mathematischen Arbeiten nicht an der Stelle wieder auf, wo er sie vorher verlassen, sondern er stürzte sich in zwei neue Forschungsrichtungen: die Relativitätstheorie einerseits und andererseits, etwas später, die Grundlagenfragen der Mathematik.

Nun waren Weyl und seine Frau in Zürich bei der Suche nach einem möglichen Ersatz für die Husserl'schen Seminare in Göttingen auf die Veranstaltungen des (seit 1911) an der ETH tätigen Philosophieprofessors und Fichte-Herausgebers Fritz Medicus gestoßen. So kam es, dass Hermann Weyl jetzt im Weltkrieg Fichte und auch Meister Eckhart studierte. Wie ernst es Weyl damit war, ist vielfach belegt und lässt sich z. B. auch aus einigen Bemerkungen in der schon mehrfach zitierten Schrift *Das Kontinuum* entnehmen. Das Buch beginnt mit einer knappen, zwei Seiten langen logischen Propädeutik, in der zunächst die Begriffe Urteil, Sachverhalt, Eigenschaft erörtert werden, und die beiden Seiten enden mit dem Satz:

> Auf eine letzte Klärung des Wesens von Sachverhalt, Urteil, Gegenstand, Eigenschaft können wir hier nicht ausgehen; diese Aufgabe führt in metaphysische Tiefen; über sie muß man sich bei Männern Rats erholen, deren Namen man unter Mathematikern nicht nennen darf, ohne ein mitleidiges Lächeln einzuheimsen – Fichte z. B. (Weyl 1918a, 2)

22 Erhard Scholz und Skuli Sigurdsson danke ich für grundlegende Aufschlüsse zu diesem Abschnitt.

Dieses Grundlagenbuch von 1918 charakterisiert die Phase in der Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Mathematik, die ich hier kurz Weyl II nenne.[23] Schon die Rhetorik des Vorworts hat sich gegenüber der Vorkriegszeit dramatisch gewandelt:

> In dieser Schrift handelt es sich nicht darum, den »sicheren Fels«, auf den das Haus der Analysis gegründet ist, im Sinne des Formalismus mit einem hölzernen Schaugerüst zu umkleiden und nun dem Leser und am Ende sich selber weiszumachen: dies sei das eigentliche Fundament. Hier wird vielmehr die Meinung vertreten, daß jenes Haus zu einem wesentlichen Teil auf Sand gebaut ist. Ich glaube, diesen schwankenden Grund durch Stützen von zuverlässiger Festigkeit ersetzen zu können; doch tragen sie nicht alles, was man heute allgemein für gesichert hält; den Rest gebe ich preis, weil ich keine andere Möglichkeit sehe.
>
> Im Mittelpunkt meiner Betrachtungen steht jenes uns durch das Kontinuum aufgegebene begriffliche Problem – es verdiente den Namen des *Pythagoras* zu tragen –, das wir durch die arithmetische Theorie der Irrationalzahlen zu lösen versuchen. [...]
>
> Immerhin möchte ich gerne nicht bloß auf den Kathedern, sondern auch von allen Studierenden verstanden sein, die mit den heute gelehrten »strengen« Grundlagen der Analysis bekannt geworden sind. (Weyl 1918a, III f.)[24]

Das Buch plädiert für eine Beschneidung der Mathematik, für ein restriktives, rein prädikatives Vorgehen im Interesse der Solidität. Man beachte den Appell an die Jugend, die nun auch im Bereich der Mathematik desillusioniert werden muss. Weyl zieht sich also in einem radikalen Entschluss auf eine echt schwächere Form der Analysis zurück: beliebige beschränkte Teilmengen reeller Zahlen haben in der Analysis gemäß Weyl II nicht mehr notwendig eine obere Grenze (Folgen reeller Zahlen, also abzählbare Teilmengen, allerdings schon).

Während den heute auf dieses Buch Zurückblickenden vor allem erstaunt, wieviel von der Analysis sich trotz des prädikativen Korsetts ableiten lässt, wurde für Weyl mit seiner Sorge um das Inhaltliche 1918

23 Ich erwähne nur *en passant*, dass Hermann Weyl daneben im selben Jahre 1918 auch sein viel berühmteres, oft wiederaufgelegtes Buch zur Relativitätstheorie veröffentlichte: *Raum, Zeit, Materie* (Weyl 1918b).

24 Das Vorwort datiert Zürich, November 1917.

der traurige Gegensatz zwischen inhaltlichem Ideal und formaler Wirklichkeit der Mathematik in der prädikativen Analysis dramatisch:

> Fassen wir den Mengenbegriff in dem präzisen Sinne, wie ich es hier befürwortet habe, so gewinnt die Behauptung, daß jedem Punkte einer Geraden (nach Wahl eines Anfangspunktes und einer Einheitsstrecke) als Maßzahl eine reelle Zahl [...] entspricht und umgekehrt, einen schwerwiegenden Inhalt. Sie stellt eine merkwürdige Verknüpfung her zwischen dem in der Raumanschauung Gegebenen und dem auf logisch-begrifflichem Wege Konstruierten. Offenbar aber fällt diese Aussage gänzlich aus dem Rahmen dessen heraus, was uns die Anschauung irgendwie über das Kontinuum lehrt und lehren kann; es handelt sich da nicht mehr um eine morphologische Beschreibung des in der Anschauung sich Darbietenden (das vor allem keine Menge diskreter Elemente, sondern ein fließendes Ganzes ist), vielmehr werden der unmittelbar gegebenen, ihrem Wesen nach inexakten Wirklichkeit exakte Wesen substruiert [...]. (Weyl 1918a, 37 f.)

Edmund Husserl und Henri Bergson hatten sich schon früher um die Aufklärung unserer ursprünglichen Erfahrungen des Kontinuums bemüht. Was Husserl angeht, mit dem das Ehepaar Weyl ja, wie erwähnt, eine gewisse Verbindung hatte und der schon früh, bei den logischen Prinzipien, in *Das Kontinuum* erwähnt wird (Weyl 1918a, 2, Fußnote), so schickte Weyl ihm ein Exemplar seines Buches, und dieser bedankte sich mit einem überschwänglichen Brief, in dem es u.a. heißt:

> Ihre Schrift über das Kontinuum, die Sie so gütig waren mir mit so warmen Widmungsworten zuzusenden, ist für mich ein bedeutendes Ereignis. Endlich ein Mathematiker, der Verständnis zeigt für die Notwendigkeit phänomenologischer Betrachtungsweisen in allen Fragen der Klärung der Grundbegriffe, und der sich also zurückfindet auf den Urboden logisch-mathematischer Intuition, auf dem allein eine wirklich quellenmäßige Begründung der Mathematik und eine Einsicht in den Sinn mathematischer Leistung möglich ist! Sie wissen, daß ich seit jungen Jahren auf diesem Wege bin u[nd] in meinen regelmäßigen log[ischen] Vorlesungen habe ich mich bemüht in immer größerer Reinheit die echt logischen Grundbegriffe (wozu auch der Mengen[-], Anzahl-, Ordnungs-, Größenzahl-begriff gehört) aus ihren phänomenol[ogischen] Quellen zu klären u[nd] zu präzisieren. Begreiflicher Weise

> stimmt vieles von dem, was Sie, von verwandten Forderungen geleitet, gesehen haben, mit dem, was ich fand, überein. [...]
>
> Ich sehe alles was Sie schreiben, wie das[,] was ich in ähnlicher Tendenz versuchte[,] in einer großen weiten Perspective u[nd] einer reinen philosophisch fundierten mathesis universalis u[nd] diese wieder verknüpft mit einer neuen formalen Metaphysik (der apr[iorischen?] u[nd] allg[emeinen] Lehre der Individualien) – an der ich seit Jahren u[nd] jetzt arbeite. (Husserl an Weyl, 10. April 1918) [25]

Die oben angedeutete Spannung zwischen Inhalt und Form der Mathematik wird in Weyls Buch jedoch am deutlichsten an der Diskussion der Zeit (Weyl 1918a, 67 ff.), und obwohl auch dort Husserls *Ideen* und Linkes *Die phänomenale Sphäre und das reale Bewußtsein* (Halle 1912) zitiert werden, kommen Weyls Ausführungen in jenem Abschnitt vor allem Henri Bergson besonders nahe.[26] So schreibt Weyl am Ende eines rein rhetorischen Versuches (Weyl 1918a, 67 f.), das arithmetische Kontinuum auf unser Erleben der phänomenalen Zeit abzubilden

> Nun, ich denke, das Alles, was wir da verlangen, ist evidenter *Unsinn*: auf *diese* Fragen bleibt die Zeitanschauung die Antwort – von der wir gerade die begriffliche Aufklärung über das Wesen ihres stetigen Flusses erwarten – schuldig; wie einer die Antwort auf Fragen schuldig bleibt, die offenbar an ihn nur aus Verwechslung heraus gerichtet und darum, an ihn gerichtet, unverständlich sind. Wohl die Kategorie der natürlichen Zahlen, nicht aber das Kontinuum, wie es in der Anschauung gegeben ist, kann das Fundament einer mathematischen Disziplin abgeben. Die Voraussetzungen dafür [...] sind nicht erfüllt; bereits dem Begriff des Punktes im Kontinuum mangelt es dazu an der nötigen Stütze in der Anschauung. Es ist das Verdienst der Bergsonschen Philosophie, mit Nachdruck auf diese tiefe Fremdheit der mathematischen Begriffswelt gegenüber der unmittelbar erlebten Kontinuität der phänomenalen Zeit (»la durée«) hingewiesen zu haben. (Weyl 1918a, 68)

25 Archiv der ETH Zürich, Nachlass H. Weyl, HS 91: 618.

26 Hesseling 2003, 312 ff. diskutiert die Beziehung zwischen Brouwers Intuitionismus und der Lebensphilosophie Heinrich Rickerts. Dessen Buch über Lebensphilosophie stammt aber erst aus dem Jahre 1920 und kann daher auf Weyl II keinen Einfluss gehabt haben.

Und an dieser Stelle zitiert Weyl Bergsons *Evolution créatrice*. Diese Berührung mit Bergsons Wissenschaftskritik scheint mir wichtig für die Verortung des Denkers Weyl II, denn »Bergson artikulierte eine Zeiterfahrung, die bestimmt war durch den Kontrast von mathematisierbarer Außenzeit, die nur zu sehr danach drängt, auch die menschliche Innenzeit zu bestimmen. Bergson formulierte die Zeiterfahrung einer Epoche, die mechanisierbare Vorgänge, nämlich den geregelten Gang des Räderwerks von Uhren, dem Alltagsleben einprägt.» (Flasch 1993, 31) – «[...] la science n'opère sur le temps et le mouvement qu'à la condition d'en éliminer d'abord l'élément essentiel et qualitatif – du temps la durée, et du mouvement la mobilité.« (Bergson 1888, 77)

Hermann Weyl stößt also am Ende des Weltkriegs bei dem Versuch, der Mathematik von Grund auf die Sicherheit ihres Gangs wiederzugeben, auf das Dilemma, dass das von ihm konstruierte Kontinuum zwar logisch streng ist, aber hinter allen ganzheitlichen Anforderungen an eine menschengemäße Mathematik weiter denn je zurückbleibt.

> Es entgeht uns eben das, was die beständig dauernde Gegenwart beständig hinüber- und hinabgleiten läßt in die absinkende Vergangenheit. – Wie es in Wahrheit sich verhält, erlebt ein jeder in jedem Moment unmittelbar; es zu beschreiben, ist, in Anbetracht der echten Ursprünglichkeit der phänomenalen Zeit, unmöglich. [...] Es ist im Wesen der Zeit begründet (und nicht in zufälligen Unvollkommenheiten unserer Mittel), daß sich ein bestimmter Zeitpunkt durchaus nicht aufweisen läßt, daß immer nur ein *approximatives*, kein *exaktes* Fixieren möglich ist. [...] Das Entsprechende gilt für jedes anschaulich gegebene Kontinuum, insbesondere auch für das Kontinuum der räumlichen Ausbreitung. (Weyl, 1918a, 70, mit Verweis auf Husserl)

Aber Weyl kann sich natürlich als Mathematiker, noch dazu mit seinen mittlerweile sehr weit entwickelten Interessen an der Physik, die resignative Haltung des Kritikers der wissenschaftlich-technischen Kultur, welche Bergsons großen Erfolg ausmachte, überhaupt nicht leisten, obwohl er sie andererseits doch nicht zu entkräften vermag. Als einziger Ausweg aus diesem Dilemma, zu dem er 1918 offenbar verdammt war, bleibt ihm nur eine vage Vertröstung des Lesers auf die Vernünftigkeit des wissenschaftlichen Vorgehens:

> So liegt denn der exakte Zeit- oder Raumpunkt nicht in der gegebenen Dauer oder Ausbreitung als deren letztes unteilbares Ele-

> ment, sondern erst die durch das Gegebene hindurchgreifende Vernunft vermag jene Ideen zu erfassen und erst an dem der rein formalen Sphäre zugehörigen arithmetisch-analytischen Begriff der reellen Zahl kristallisieren sie zu ihrer vollen Bestimmtheit aus. (Weyl 1918a, 70 f.)

Das ist eine trotzige, gegen Bergson angedachte Rettung der Möglichkeit einer »Zeit- und Raumlehre als selbständige mathematisch-axiomatische Wissenschaft«. Und Weyl tröstet sich und den Leser über die Unmenschlichkeit dieser gar nicht holistischen Vernunfttheorie mit dem Hinweis hinweg, dass es jedenfalls unmöglich ist, einen Punkt anders analytisch zu bestimmen als in Bezug auf ein gesetztes Koordinatensystem:

> Das Koordinatensystem ist das unvermeidliche Residuum der Ich-Vernichtung in jener geometrisch-physikalischen Welt, welche die Vernunft aus dem Gegebenen unter der Norm der »Objektivität« herausschält – letztes dürftiges Wahrzeichen noch in dieser objektiven Sphäre dafür, daß Dasein nur gegeben ist und gegeben sein kann als intentionaler Inhalt der Bewußtseinserlebnisse eines reinen, sinngebenden Ich. (Ebd. 72)

Wir betonen dieses Dilemma von Weyl II vor allem, weil es unzweifelhaft eine wesentliche Motivation für den Übergang zur Phase Weyl III war.

1.7 *Weyl III.* Hermann Weyl und Luitzen Egbertus Jan Brouwer trafen sich im Sommer 1919 im Engadin. Die bekannte Folge dieser Begegnung und der darauf folgenden Brouwer-Studien Weyls war dessen intuitionistische Periode, die etwa von 1920 bis 1925 oder 1926 dauerte und während der Hermann Weyl der vielleicht wirkungsvollste Propagator des Intuitionismus war.

Der Übergang von »Weyl II« zu »Weyl III« erklärt sich aus dem 1918 noch unerfüllbaren Wunsch nach einer ganzheitlichen Entwicklung der Analysis im Einklang mit den unmittelbaren Erfahrungen und Fähigkeiten der Menschen. Mit Bergson konnte man kaum etwas anderes tun als die Kluft zwischen dem mathematischen und dem unmittelbar erlebten Kontinuum zu konstatieren. Mit Brouwers Idee der Wahlfolgen konnte Weyl nun seiner früheren *atomistischen* Theorie des Kontinuums eine Auffassung des Kontinuums als *Medium freien Werdens* gegenüberstellen, die ihm mindestens eine Zeitlang die Einheit einer der menschlichen Anschauung gemäßen Mathematik stiftete:

> Der bisherigen Analysis erschien das Kontinuum als die Menge seiner Punkte; sie sah in ihm nur einen Spezialfall des logischen Grundverhältnisses von *Element und Menge*. Wem wäre es nicht schon aufgefallen, daß das ebenso fundamentale Verhältnis von *Ganzem und Teil* bislang in der Mathematik überhaupt keine Stelle hatte? *Daß es Teile hat*, ist aber die Grundeigenschaft des Kontinuums; und so macht die Brouwersche Theorie (im Einklang mit der Anschauung, gegen welche der heutige »Atomismus« so arg verstößt) dieses Verhältnis zur Grundlage für die mathematische Behandlung des Kontinuums. (Weyl 1921, 177)

Nach dem Weltkrieg glaubte Hermann Weyl also, durch Brouwer eine inhaltliche Umsetzung seiner holistischen Prinzipien *innerhalb* der Grundlagen des Kontinuums selbst gefunden zu haben. Eine neue fruchtbare Einheit von reicher Mathematik und Treue unseren Anschauungen gegenüber schien möglich. Zu dieser Hoffnung passt die folgende Petition der Studenten und Assistenten an den Präsidenten der ETH vom Mai 1920:

> Da an Herrn Prof. Weyl zwei Berufungen nach Göttingen und Berlin ergangen sind, fühlen wir uns verpflichtet, Ihnen unsere Stellung ihm gegenüber mitzuteilen. Unsere Überzeugung, daß Herr Prof. Weyl unersetzlich ist, entspringt folgenden Gründen: Wir verehren in ihm den genialen Schöpfer neuer Kulturwerte, die darin bestehen, daß die exakten Wissenschaften in einen fruchtbaren Zusammenhang mit dem Leben kommen. Es ist die überaus glückliche Verbindung des Menschen und Gelehrten in Herrn Prof. Weyl, die in jedem von uns ein befreiendes Gefühl auslöst [...], die sicherste Gewähr dafür [...], daß ganze Leute aus der achten Abteilung hervorgehen. (Zitiert nach Frei und Stammbach 1992, 43 f.) [27]

27 Die »achte Abteilung« war das damalige Institut für reine Mathematik der ETH. Weyl blieb damals in der Tat in Zürich. Man sollte freilich zur Vervollständigung des Bildes auch sagen, dass Weyl in seiner Züricher Zeit nur einen einzigen Doktoranden hervorgebracht hat.

Diese Phase in Weyls Entwicklung hat in der Sekundärliteratur soviel Aufmerksamkeit erhalten, dass es einem immer noch passieren kann, ungläubig angeschaut zu werden, wenn man darauf hinweist, dass Weyls Intuitionismus nur eine recht kurze Episode in seiner wechselvollen Entwicklung bestimmte.[28] Irgendwann in der Mitte der zwanziger Jahre zog sich Weyl allmählich von der intuitonistischen Position zurück, und ab 1928 ist auch allgemein statistisch der erste Abfall in der Anzahl von neu veröffentlichten Reaktionen auf Brouwers Lehre zu verzeichnen (Hesseling, 2003, 359). Spätestens in diesem Jahr – das für die deutschen Mathematiker durch den Streit um die Teilnahme (zum ersten Mal wieder nach dem Nachkriegsboykott der deutschen Wissenschaft) am Internationalen Mathematikerkongress in Bologna und durch den Rauswurf Brouwers aus der Redaktion der *Mathematischen Annalen* durch Hilbert geprägt war –, spätestens 1928 also stand Weyl in seiner vierten Phase des Nachdenkens über die Grundlagen der Analysis (siehe 1.9 unten).

1.8 *Rezipiert Wittgenstein Weyl II oder Weyl III?* Unsere Unterscheidung der Denkphasen Hermann Weyls suggeriert diese Frage; sie ist aber nur bedingt hilfreich und hat jedenfalls keine einfache Antwort. Betrachten wir z. B. die folgende Passage aus Weyls *Symposium*-Artikel, den Wittgenstein ja, wie wir wissen, rezipiert hat. Dort kritisiert Weyl den üblichen, bedenkenlos extensionalen Standpunkt der Mengenlehre wie folgt:

> Fragt man, ob in einer Menge ein Element von dieser oder jener Art vorkommt, so kann die Entscheidung darüber nicht so erfolgen wie bei einem endlichen Inbegriff, der aus einzeln aufgewiesenen Gegenständen besteht, wo man die Elemente der Reihe nach prüfend durchgeht. Noch bedenklicher steht es um die Frage: *Gibt* es in einer vorgelegten unendlichen Menge, etwa der Menge aller rationalen Zahlen, *eine Teilmenge*, die den und den Bedingungen genügt? Denn habhaft werden können wir doch nur solcher Teilmengen, die gesetzmäßig durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente festgelegt sind. Man wird aber schwer das Gefühl los, daß damit eine chaotische Fülle von Möglichkeiten, von willkürlich »zusammengewürfelten«, »gesetzlosen« Mengen unter den Tisch fällt. Die Mengentheorie hat alle solche idealistische Bedenken beiseite geschoben, die sich an Überlegungen darüber knüpfen, wie Mengen wesensmäßig allein gegeben sein können; sie glaubt, daß die ans Unendliche, an die unendlich vielen Elemente oder Teilmengen gerichtete Frage »gibt es oder gibt es nicht ?« unter allen Umständen in einem an sich bestehenden Sachverhalt Antwort findet, mag es unserer Einsicht auch immer nur durch einen Glücksfall der mathematischen Methode gelingen, diese stumme und verschlossene Antwort in eine ausgesprochene und am Tage liegende zu verwandeln. »An sich« oder »vor Gott« ist alles bis ins letzte bestimmt. (Weyl 1925, 519)

28 Unter den sorgfältigen Darstellungen verweisen wir auf Mancosu 1998, 76–79 und Hesseling 2003. Wir selbst erörtern hier weder die üppigen, vor allem auch politischen Metaphern in Weyls Arbeiten aus jener Zeit (siehe hierzu nach wie vor am besten Mehrtens 1990, 289–299) noch auch die Frage, inwieweit Weyls Intuitionismus von Brouwers Lehre abwich.

Ohne Frage steht diese Passage in der Kontinuität der Bedenken gegen nicht umfangsdefinite Begriffsbildungen und imprädikative Definitionen, die wir bei Weyl II angetroffen haben, und sie setzt übrigens auch die kritischen Bemühungen von Weyl I um ordentliche Definitionen in der Mengenlehre fort. Aber wie im Weyl-Zitat in 1.1 oben werden hier Existenzialurteile über unendliche Bereiche grundsätzlicher problematisiert als früher.[29] Wir deuten dies so, dass die Erfahrung der Möglichkeit des Brouwer'schen Zugangs zur Mathematik für Weyl die alten Bedenken in eine neue, weitere Perspektive stellte. Das Zitat ist nicht mehr konkret auf die prädikative Rettung der soliden Analysis ausgerichtet; die Position Weyl III ermöglicht eine allgemeinere, freiere Orientierung. Was dieses Zitat aus dem *Symposium*-Artikel von der Zeit des Weltkriegs unterscheidet, als Weyl sein Buch *Das Kontinuum* verfasste, ist, dass es mit dem Wissen um Wege des Denkens geschrieben ist, die dem Autor 1918 noch unbekannt waren oder die er ausgeblendet hatte. Diese Verschiebung scheint für die neue Allgemeinheit verantwortlich zu sein, mit der hier Existenzialurteile in Frage gestellt werden.

Auch bei Wittgenstein gibt es eine Frage der Periodisierung: Kienzler (1997, 143–178) arbeitet den Umschwung von 1931 in Wittgensteins

29 Der Unterschied wird z. B. deutlich an dem auf Seite 521 f. zuerst erläuterten Beispiel der natürlichen Zahlen, die »dem Mengentheoretiker [...] als eine fertige Menge« erscheinen, während sie doch durch das Induktionsprinzip nur sukzessive »erzeugt« werden.

Nachdenken über das Unendliche, insbesondere das Unendliche in der Mengenlehre und Mathematik, heraus.[30] Im Sinne dieser Einteilung gehört Wittgensteins Rezeption von Weyls *Symposium*-Artikel der ersten Phase an, in der Wittgenstein jede extensionale Unendlichkeit streng zurückwies, und allein intensionale Unendlichkeit akzeptierte. Die unmittelbare Weyl-Rezeption Wittgensteins liegt demnach vor seinem Übergang zur eingehenderen Untersuchung der Grammatik des Unendlichen in der Mathematik ab 1931. So ermöglicht die Weyl'sche Erfahrung der Möglichkeit einer alternativen, intuitionistischen mathematischen Praxis bemerkenswerter Weise gerade jene Aussagen Wittgensteins, die dazu geführt haben, dass man ihn vorschnell und zu unrecht für einen »potentiellen Zerstörer« (Kienzler 1997, 143) existierender Mathematik hielt.

1.9 *Weyl IV.* Die Beschreibungen dieser letzten Phase durch die Mathematikhistoriker scheinen mir noch nicht recht zu konvergieren; mehr Arbeit ist nötig. Für die Beziehung zu Wittgenstein hat das freilich keine Bedeutung. Ich erwähne nur kurz zwei Gesichtspunkte.

Weyl selbst hat in der Beschreibung der Schwierigkeiten mit dem Brouwer'schen Standpunkt vor allem die unerträgliche Beschränktheit dieser Art Mathematik betont – nicht unähnlich der Art und Weise, wie er im *Kontinuum* die Möglichkeit der Mathematisierung des phänomenal Gegebenen als Erfordernis der Vernunft einklagte. So heißt es etwa am Schluss des *Symposium*-Artikels:

> So ist es sicherlich von großem Nutzen, daß uns Brouwer in der Mathematik wieder den Sinn für das anschaulich Gegebene gestärkt hat. Seine Analysis spricht den Gehalt der mathematischen Urintuition rein aus und ist darum von rätselloser Klarheit durchleuchtet. Aber neben dem Brouwerschen wird man den Hilbertschen Weg verfolgen müssen; denn es ist nicht zu leugnen, daß in uns ein vom bloß phänomenalen Standpunkt schlechterdings unverständliches theoretisches Bedürfnis lebendig ist, dessen auf symbolische Darstellung des Transzendenten gerichteter Schaffensdrang Befriedigung verlangt. (Weyl 1925, 542)

30 Siehe insbesondere die an Weyl erinnernden Wittgenstein-Zitate in Kienzler 1997, 145–152.

An diese und ähnliche Äußerungen anknüpfend hat Mancosu Weyl IV vor allem unter dem Gesichtspunkt des Vermittlungsversuchs zwischen Brouwer und Hilbert interpretiert (Mancosu 1998, 80 f.).

Einen ganz anderen Aspekt hat demgegenüber Moritz Epple (Epple 2000b) mit seiner These ins Spiel gebracht, dass es Brouwer nie gelang, einen im Sinne seiner eigenen Mathematik (insbesondere ohne *tertium non datur*) befriedigenden Beweis des intuitionistischen Analogons der Kontraposition von Königs Lemma[31] zu geben – also eines Resultats, das für die Hauptsätze seiner intuitionistischen Analysis[32] eine zentrale Rolle spielt.

1.10 *Wittgensteins Verifikationismus 1928–1930.* Nach Hans-Joachim Dahms hat Wittgenstein »den Verifikationismus aufgebracht, um eine Lücke in der *Tractatus*-Philosophie der Mathematik durch eine Anlehnung an intuitionistische Positionen und insbesondere diejenige Weyls zu beheben« (Dahms 1981, 445). Im Sinne unserer Beschreibung der Positionen Weyls haben wir genauer gesehen (siehe 1.8), dass die von Wittgenstein aus Weyl (nicht aus Brouwer!) angenommenen Anregungen – insbesondere die Problematisierung der Existenzialurteile und imprädikativen Definitionen – substantiell auf die prä-intuitionistische Phase Weyl II zurückgehen. Wittgenstein entnimmt sie aber wohl vor allem Weyls späteren *Symposium*-Artikel von 1925, der eine Rückschau auf dem Hintergrund der Erfahrungen aus der intuitionistischen Phase Weyl III darstellt.

Indem ich mich im Rahmen dieses Aufsatzes bewusst auf die Verifikationismusthese *in Bezug auf die Mathematik* beschränke – d. h. also in Wittgensteins Worten auf die These: »Die Bedeutung eines mathematischen Begriffs ist die Art seines Gebrauches, der Sinn eines mathematischen Satzes die Methode seiner Verifikation«[33] –, liegt es nahe, diese These als eine Variante der Problematisierung unendlicher Existenzialurteile anzusehen, die in 1.1 und 1.8 oben nach Weyl zitiert und auf deren Wittgenstein'sche Ausprägung besonders in 1.8 verwiesen wurde. So erscheint der Verifikationismus als die philosophisch radikalisierte

31 »Für einen endlich sich verzweigenden Baum mit Wurzel, dessen sämtliche Zweige endliche Länge haben, gibt es eine Schranke N, so daß die Länge aller Zweige kleiner als N ist.«

32 Z. B. für den von Brouwer erstmalig 1924 veröffentlichten Satz: »Jede volle Funktion ist gleichmäßig stetig.«

33 Siehe WWK 20; für Waismanns Vortrag in Königsberg 1930.

Gegenreaktion auf eine mathematische Praxis, welche sich nicht darum schert, wie ihre Gegenstandsbereiche tatsächlich gegeben werden können. Auch Weyl, wiewohl er die radikale verifikationistische These selbst weder ausspricht noch wohl teilt, sprach immerhin (siehe oben, erstes Zitat in 1.1) von dem seines Beweises entkleideten Existenzsatz als von einem »wertlosen Schatten« und verglich ihn mit der Mitteilung über das Vorhandensein eines Schatzes ohne Ortsangabe: »Sein einziger Wert liegt darin, dass [er] mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen.«

Suchen im eigentlichen Sinne kann man – betont Wittgenstein – nur, wenn man eine Strategie dafür hat. Unter diesem prozeduralen Aspekt – d. h. aus der Sicht der alltäglichen Tätigkeit der Mathematiker, die ja im Verfertigen neuer Beweise und Sätze besteht – besagt die verifikationistische These demnach, dass ein Satz in dem Maße mit Sinn erfüllt wird, wie wir eine Methode entwickeln, ihn zu beweisen:

> Man könnte auch fragen: Wie geht denn jener Prozeß vor sich, wenn wir noch gar keine Ahnung haben, wie ein gewisser Satz zu beweisen ist und doch fragen: ›Läßt er sich beweisen oder nicht?‹, und nach dem Beweis für ihn ausschauen? Wenn wir ›versuchen, ihn zu beweisen‹, was tun wir da? Ist es wesentlich ein Suchen ohne jedes innere System, also eigentlich *kein Suchen*, oder kann irgendein Plan vorhanden sein? Die Antwort auf diese Frage ist ein Fingerzeig dafür, ob der noch unbewiesene – oder noch unbeweisbare – Satz sinnlos ist oder nicht. Denn in einem sehr bedeutungsvollen Sinn muß jeder sinnvolle Satz durch seinen Sinn uns anweisen, wie wir uns davon überzeugen sollen, ob er wahr oder falsch ist. (PB § 148, 170)

Diese – man könnte sagen – prozedurale Fassung des Verifikationismus gibt Wittgenstein die Möglichkeit, eine allzu starre Auslegung der These – der zufolge ja alle unbewiesenen Vermutungen, oder präziser: alle mathematischen Behauptungen, für die noch keine Beweisstrategie bekannt ist, gleich sinnleer wären – auf eine Weise abzumildern, die der mathematischen Praxis entgegenkommt: »Meine Erklärung darf nicht das mathematische Problem aus der Welt schaffen. D. h. es ist nicht so, dass ein mathematischer Satz erst dann gewiss einen Sinn hat, wenn er (oder sein Gegenteil) bewiesen worden ist.« (Ebd.) Und auch in dem folgenden Bild wird dem Satz selbst, ohne seinen Beweis, eine kleine eigene Rolle zugestanden, den Beweis anzuzeigen: »Der mathematische Satz verhält sich dann zu seinem Beweis wie die oberste Fläche eines

Körpers zu diesem selbst. Man könnte vom Beweiskörper des Satzes reden. Nur unter der Voraussetzung, dass ein Körper hinter der Fläche steht, hat der Satz für uns Bedeutung.« (PB § 162, 192)

Anstatt Vermutungen und Probleme aus den sinnvollen Sätzen einfach auszuschließen, schafft Wittgenstein also innerhalb des verifikationistischen Rahmens einen gewissen Freiraum, innerhalb dessen insbesondere mathematische Probleme ihren Platz finden, und zwar insoweit wie sie in das Blickfeld von Beweisansätzen, von mathematischen »Kalkülen« treten. Demnach wäre eine Vermutung ein Satz auf der Suche nach Anschluss an einen deduktiven Zusammenhang. Aber dieser Satz im Wartestand hat wohlgemerkt keinen Sinn, keine Bedeutung, die von dem Kalkül, an den man ihn anzuschließen versucht, unabhängig wäre, und je nachdem in welchem Horizont man ihn betrachtet, handelt es sich um einen neuen Satz. Mit anderen Worten: Wie einleuchtend die Brücke von Weyls Kritik der Existenzialurteile zu Wittgensteins Verifikationismus in der Mathematik auch sein mag, so bürstet Wittgensteins Ansicht über den Sinn des Satzes das übliche Reden über mathematische Aussagen doch erheblich gegen den Strich und korrigiert insbesondere die Redeweise, dass verschiedene Beweise »für dasselbe Theorem« gegeben werden. Er verknüpft diese Korrektur zugleich mit seiner Unterscheidung zwischen Kalkül und Prosa in der Mathematik, z. B. im Falle des schon in 1.1 erwähnten so genannten »Fundamentalsatzes der Algebra«:

> Wenn ich einmal beweise, daß eine Gleichung n-ten Grades n Lösungen haben muß, indem ich z. B. einen der Gaußschen Beweise gebe, und wenn ich ein zweites Mal die Existenz dadurch beweise, daß ich das Verfahren zur Konstruktion der Lösungen angebe, so habe ich nicht etwa zwei verschiedene Beweise für den selben Satz gegeben, sondern ich habe ganz verschiedene Dinge bewiesen. Was gemeinsam ist, ist ja nur der Satz der Prosa »Es gibt n Lösungen«, der aber für sich genommen überhaupt nichts bedeutet, sondern nur zur Abkürzung für einen Beweis steht. Sind die Beweise verschieden, so *bedeutet* jener Satz eben Verschiedenes. Daß man in beiden Fällen von »Existenz« spricht, hat seinen Grund darin, daß der Beweis für die Existenz der Lösungen eine gewisse Verwandtschaft zeigt mit dem Verfahren der Konstruktion der Lösungen. Aber an sich darf man die Worte »Es gibt« in diesem Zusammenhang durchaus nicht so verstehen, wie wir sie im täglichen Leben verstehen, wenn ich etwa sage: »Es gibt in diesem Zimmer einen Menschen«. […] (Die Worte »Es gibt« gehö-

ren gleichfalls einem Kalkül an, nur einem anderen, als dieselben Worte in der Umgangssprache.) (WWK 172 f.)

Diese Bemerkung – die übrigens zu den nicht so häufigen Stellen gehört, an denen Wittgenstein mathematische Aussagen und Beweise als Beispiel wählt, die auch Mathematiker als Theorem ernst nehmen können – ist unser Ausgangspunkt für die Überlegungen im zweiten Teil dieser Arbeit.

Zuvor sei noch bemerkt, dass Wittgensteins Verifikationismus nicht auf ganze Sätze beschränkt ist. Vielmehr gehört für ihn zum Horizont möglicher Beweise auch die Konstitution der im Satz angesprochenen mathematischen Gegenstände:

> Der Sinn eines Satzes ist die Methode seiner Verifikation. Diese ist nicht das Mittel, um die Wahrheit eines Satzes festzustellen, sondern der Sinn selbst. Diese muß man kennen, um den Satz zu verstehen. Nach einer Methode der Verifikation kann man nicht suchen. [...]
>
> Eine allgemeine Aussage, die durch vollständige Induktion verifiziert wird, muß in einem ganz anderen Sinn allgemein sein, als eine solche, die durch Einzelfälle verifiziert wird. Die Allgemeinheit muß in beiden Fällen etwas Verschiedenes bedeuten und dementsprechend der Ausdruck »*Klasse*«.
>
> Der Ausdruck »Klasse« hat soviel verschiedene Bedeutungen, als es Methoden der Verifikation gibt. (WWK 227)[34]

Fassen wir zusammen. Wie Weyl durch die Problematik imprädikativer Definitionen (durch das Richard'sche Paradox) dazu geführt wurde, unterschiedliche Umgehensweisen mit dem Existenzquantor aufs Genaueste zu trennen, so übernahm Wittgenstein diese Aufmerksamkeit, um eine Beschreibung der mathematischen Tätigkeit und ihrer Ergebnisse zu liefern: »Man kann in der Mathematik nicht schreiben,[35] sondern nur machen. (Eben darum kann man in der Mathematik nicht mit diesen Zeichen ›schmusen‹.)« (PB § 157, 186) Und in unbegründetem Optimismus, was die Entwicklung der mathematischen Zunft angeht:

34 Vgl. hierzu auch die folgende Stelle, die unmittelbar zu der in 1.8 diskutierten Kritik an der Mengenlehre gehört: »Die Auffassung, die der heutigen irreführenden Ausdrucksweise der Mengenlehre zugrunde liegt, ist die, daß man die Bedeutung einer Klasse verstehen kann, ohne zu wissen, ob die Klasse endlich oder unendlich ist, daß man dies vielmehr erst nachträglich feststellt.« (WWK 228)

35 Hier merken die Herausgeber an: »Wie man etwa Geschichte schreiben kann.«

»Der Philosoph spürt Wechsel im Stil seiner Ableitung, an denen der Mathematiker von heute, mit seinem stumpfen Gesicht ruhig vorübergeht. Eine höhere Sensitivität ist es eigentlich, was den Mathematiker der Zukunft von dem heutigen unterscheiden wird.« (PG 381)

2. Eine Wittgensteinsche Propädeutik der Mathematikgeschichtsschreibung

Wir haben gesehen, wie Wittgensteins Verifikationismus die scheinbare Identität mathematischer Sätze in Abhängigkeit von den Beweishorizonten, in denen sie gesehen werden, auflöst. Er selbst erläutert dies (wie oben zitiert) am so genannten Fundamentalsatz der Algebra. Gewissenhafte Mathematikhistoriker machen es ähnlich:

2.1 Christian Gilain (Paris) hat in mehreren Arbeiten die historische Entwicklung verschiedener Varianten des »Fundamentalsatzes der Algebra« untersucht. Die Unterscheidung zwischen verschiedenen Beweismethoden und Beweiszielen ist zentral für das Verständnis der historischen Entwicklung im Umkreis dieses wichtigen Satzes. Gilains Arbeit beginnt mit einer – sagen wir – Dekonstruktion der in der mathematikhistorischen Standardliteratur weit verbreiteten Darstellung, der zufolge »dieser Satz« zunächst am Anfang des 17. Jahrhunderts insbesondere von Girard ohne Beweis formuliert, dann von d'Alembert und Euler in der Mitte des 18. Jahrhunderts mit ersten Beweisversuchen versehen und schließlich an der Wende zum 19. Jahrhundert von Gauß zum ersten Male streng bewiesen wurde. »So folgen also nacheinander auf derselben geschichtlichen Achse das, was als Vermutung erscheint, dann der Beweisversuch, und schließlich der Beweis.« (Gilain 1991, 92)[36]

Im Gegensatz zu dieser Darstellung unterscheidet Gilain in der Geschichte dieser Thematik zwei verschiedene Traditionen, die er freilich (sich gar nicht an Wittgenstein, sondern eher an den Diskurs der heutigen Mathematiker anlehnend) einfach als zwei separate Theoreme formuliert: die Aussage über die Existenz von komplexen Wurzeln einerseits und die rein algebraische Zerlegung in Linearfaktoren (gegebenenfalls in dem, was man heute eine Erweiterung des Körpers der Koeffizienten nennt) andererseits. Gemäß dieser Dichotomie unterscheidet

36 »Se succèdent ainsi, sur le même axe historique, ce qui apparaît comme la conjecture, l'essai de preuve et la preuve du théorème.«

er zwei Traditionen, die er dann im Einzelnen von Girard bis in das 20. Jahrhundert hinein verfolgt, ohne sie jemals zu amalgamieren.

Wir gehen hier nicht in Einzelheiten. Aber es ist sofort deutlich, dass Gilain in der methodischen Sorge um das richtige Erfassen der »Geschichte des Fundamentalsatzes der Algebra« als erstes die Identität des Untersuchungsgegenstandes, »dieses Satzes«, auflöst – in diesem Fall in eine Dualität von zwei Sätzen. Freilich wird diese Entscheidung, wie man beim genaueren Lesen der Arbeit erkennt, *ad hoc* und unter Zuhilfenahme der modernen Formulierung der mathematischen Sachverhalte vorgenommen und in die Form einer Unterscheidung zweier Theoreme gegossen. Insofern ist diese – wie wir gesagt haben – Dekonstruktion der Identität des Satzes bei Gilain weit weniger radikal als Wittgensteins konsequent zu Ende gedachte Auflösung der Einheit des Satzes gemäß jedes neuen Beweishorizontes. Andere Mathematikhistoriker aber gehen in der Tat weiter als Gilain und gelangen auf diesem Wege in erstaunliche Nähe zu Wittgensteins Ansatz.

2.2 Eines der methodisch interessantesten neueren Bücher zur Mathematikgeschichte, Catherine Goldsteins *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, studiert exemplarisch die Geschichte »eines« mathematischen Satzes, nämlich des einzigen Satzes, für den Pierre de Fermat wenigstens eine Beweisskizze mit seiner Methode des unendlichen Abstiegs (*descente infinie*) hinterlassen hat. Obwohl es ja laut Wittgenstein sinnlos ist, »diesen Satz« ohne seinen Beweis anzugeben, kann man immerhin eine Fassung zitieren, in der Fermat selbst ihn formuliert hat: *Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks in Zahlen* (d.h. mit rationalen Seitenlängen) *ist kein Quadrat* (d.h. keine rationale Quadratzahl). Goldsteins Arbeit besteht darin, »die Geschichte« dieses Satzes[37] in eine erstaunlich große Zahl verschiedener und methodisch für die historische Untersuchung zu trennender »Geschichten« (*histoires*) aufzulösen, die jeweils verschiedenen Rezeptionen (*lectures*) der Fermat'schen Note durch verschiedene Leser in verschiedenen Zeiten und Situationen entsprechen. Goldstein lässt diese verschiedenen Lesarten als inkompatibel nebeneinander stehen; erst ihre bunte Gesamtheit macht »die« Geschichte des Theorems aus, die sich nicht auf eine kohärente Erzählung reduzieren lässt. In Goldsteins *Conclusion* heißt es:

37 Um nur dies hier *en passant* zu erwähnen: Eine seit dem frühen 20. Jahrhundert mögliche Lesart dieses Satzes führt geradewegs in das heute sehr aktive Forschungsgebiet der Arithmetik elliptischer Kurven.

> Eines meiner Hauptanliegen beim Abfassen dieses Buches war es, die üblicherweise so genannten »Langzeitgeschichten« einer Prüfung zu unterziehen. In der Tat stellen sie das entscheidende Hindernis für jeden Versuch dar, die Mathematik als geschichtliche menschliche Tätigkeit darzustellen. Diejenigen, die ein solches Vorhaben nicht teilen, wollen vor allem den Faden herausheben, der sich über mehrere Jahre, Jahrhunderte, Jahrtausende spannt. Sie leiten das Recht, diesen Faden zu entwickeln, aus der Überzeugung ab, daß es eine gewisse Permanenz oder jedenfalls schon etablierte Verbindungen gibt. Das, was auf dem Faden liegt, ist gerade per definitionem den äußerlichen Wandlungen nicht unterworfen. Diese Debatte ist die Folge einer optischen Täuschung, die durch die Untersuchung der Geschichten eines Theorems aufgelöst werden kann: Jene Permanenz entgeht eben nicht von vorneherein diesen Wandlungen, insofern sie durch spezifische Erzählungen beschrieben, ja hergestellt wird. [...]
>
> Jede Geschichte deckt nur einen Teil ab, beruht auf vorher gemachten Annahmen, auf einer Entscheidung, sich an gewisse Texte und nicht an andere zu halten: Dass diese Grundannahmen meistens implizit sind, liegt am *genre* der historischen Erzählung zu einem gegebenen Zeitpunkt und nicht daran, dass sie in idealem Einklang mit den Gesetzen der Wissenschaftsentwicklung stünden. Die optische Täuschung besteht darin, diese Phänomene zu ignorieren und das bedenkenlos in eine vergangene Welt hineinzuprojizieren, was vielleicht nur der Ordnung der gegenwärtigen Welt angehört. Die Hauptgefahr ist, dass dabei ein Bild der mathematischen Schöpfung entsteht, das in Wirklichkeit nur aus stillschweigend gemachten Annahmen folgt: Zuvor vorgenommene Identifikationen können auf diese Weise eine kumulative Darstellung wissenschaftlicher Resultate unterstützen. Die Identität aber – so der Refrain dieses Buches – ist keine Tautologie. (Goldstein 1995, 179; Übers. N.S.)

Dieses Aufsprengen vermeintlich sachgemäßer Identifikationen bezieht sich bei Goldstein ebenso auf die mathematischen Sätze wie auf ihre Beweise. Einer der Ausgangspunkte ihres Buches war sogar der Vergleich zweier etwa gleichzeitiger Beweise des erwähnten Fermat'schen Satzes: neben Fermats eigener Beweisskizze ein Beweis von Frenicle de Bessis. Beide Beweise wurden von Zeitgenossen als verschieden angesehen, während sie uns heute zum Verwechseln ähnlich erscheinen.

Die historiographische Rede von der optischen Täuschung der Langzeiterzählungen über mathematische Objekte oder Sätze, wie sie Goldstein im einzelnen an der Geschichte der verschiedenen *lectures*, d. h. Rezeptionen, des Fermat'schen Beweistextes auseinandersetzt, passt nahtlos zusammen mit folgendem Wittgensteinzitat, das dort auch schon durch zwei Beispiele aus der Mathematikgeschichte motiviert wird – die »Entdeckung Sheffers« und »die Entdeckung der Methode, die Kubikwurzel zu ziehen« (PB § 155, 182):

> Ich will sagen, daß das Finden eines Systems zur Lösung von Problemen, die man früher nur einzeln durch separate Methoden lösen konnte, nicht bloß die Auffindung eines bequemeren Vehikels ist, sondern einer ganz neuen Sache, die man früher überhaupt nicht hatte. Die einheitliche Methode ist eben nicht nur die Methode der Herstellung eines Gegenstands, der der gleiche ist, auf welche Art immer er hergestellt wurde. Die Methode ist kein Vehikel, das uns an einen Ort führt, der eigentlich unser Ziel ist, wie immer wir ihn auch erreichen.
>
> Das heißt: Ich glaube, man kann in der Mathematik keinen *Weg* finden, der nicht eben ein Ziel ist. Man kann nicht sagen: Alle diese Resultate hatte ich schon, ich finde jetzt nur noch einen bessern Weg, der zu allem hinführt. Sondern dieser Weg ist ein neuer Ort, den man bisher noch nicht hatte. Der neue Weg macht ein neues System aus.
>
> Soll das nicht heißen, daß man in der Mathematik nichts Neues über einen Gegenstand erfahren kann, weil es dann ein neuer Gegenstand ist? (Ebd. 183)

Man kann diese Auffassung Wittgensteins gewissermaßen axiomatisch aus dem Verifikationismus ableiten; wir haben ja auch schon gezeigt, wie innig sie mit ihm verknüpft ist.[38] Umgekehrt darf man nach dem Ursprung von Wittgensteins Verifikationismus in Bezug auf die Mathematik fragen, unabhängig von oder jenseits der Tatsache, dass dieser, wie gezeigt, auch durch die Lektüre Weyls veranlasst war. Die Überschneidung zwischen Goldsteins mathematikhistorischem Ansatz und Wittgensteins eben zitierten Überlegungen bestärkt uns in unserer Ansicht, dass Wittgensteins Philosophie der Mathematik versucht, eine besonders sensible Analyse der mathematischen Praxis zu sein. Damit steht sie schon grundsätzlich der aktuellen Wissenschaftsgeschichte sehr nahe und kann darüber hinaus wichtige Gesichtspunkte zur Sonderrolle der Mathematikgeschichte innerhalb der Wissenschaftsgeschichte beleuchten. In Wittgensteins eigenen Worten: »Die Philosophie der Mathematik besteht in einer genauen Untersuchung der mathematischen Beweise – nicht darin, dass man die Mathematik mit einem Dunst umgibt.« (PG 367)

38 Diese Verknüpfung ist auch im gesamten Paragraphen 155 der *Philosophische Bemerkungen* greifbar. Der Abschnitt endet jedoch mit einer ungewöhnlich kritischen Reflektion auf die verifikationistische Grundthese: »Wenn ich den Beweis kennen lerne, so lerne ich also etwas *ganz Neues* kennen, nicht nur den Weg zu einem mir schon bekannten Ziel. – Dann ist es aber unbegreiflich, daß ich, wenn der Beweis geliefert ist, zugebe, daß er der Beweis eben *dieses* Satzes ist.« (PB § 155, 183) Man könnte versuchen, diese Frage (ähnlich wie die oben angesprochene Schwierigkeit der mathematischen Vermutungen und Probleme) durch eine prozedurale, flexiblere Fassung des Verifikationismus zu beantworten. Man kann sie aber auch zum gebieterischen Anlass einer tiefer gehenden Revision der verifikationistischen These nehmen.

2.3 In Weiterentwicklung des Vorstehenden sehe ich das Verhältnis zwischen Wittgensteins Philosophie der Mathematik – soweit ich sie hier betrachte – und der Geschichtsschreibung mathematischer Praxis als ein Geben und Nehmen: Von Wittgensteins Ansatz kann die Historiographie z. B. lernen, wie die »genaue Untersuchung der mathematischen Beweise« dazu führt, die von den Mathematikern ungefragt vorausgesetzte Identität von Theoremen im Lichte der mathematischen Arbeit, die sich ›mit ihnen‹ befasst, aufzubrechen und einer feineren Analyse zu unterziehen:

> Aus dem Blickwinkel der Historiographie ist [insbesondere eine Wittgensteinsche] mathematikphilosophische Position attraktiver als eine platonistische, weil sie in viel größerem Maße gestattet, den mannigfachen Differenzen und Variationen im Gebrauch mathematischer Begriffe nachzugehen. (Epple 1999, 14)[39]

Umgekehrt kann die Einführung der historischen Dimension eine Bereicherung des philosophischen Ansatzes leisten, die Wittgenstein zwar fern gelegen haben mag, die aber jedenfalls den Blick schärft für *diverse*

39 Dieses Zitat nimmt unmittelbaren Bezug auf Wittgensteins These: »Der Gebrauch des Wortes in der Sprache ist seine Bedeutung.« (PG 60) Als Randnotiz sei bemerkt, dass der Gegenstand von Epples grundlegendem Buch, die mathematische Knotentheorie, auch von Wittgenstein hin und wieder als Beispiel bemüht wird; vgl. WWK 37; PB XII, passim.

Aspekte der Sinnkonstitution mathematischer Resultate. Dazu gehört dann freilich mehr als die Produktion von Beweisen. So wird die historische Betrachtung dazu neigen, auch solche Gesichtspunkte als erhellend für den Sinn mathematischer Forschung und mathematischer Theoreme zu betrachten, an die Wittgenstein in seiner Philosophie der Mathematik wohl deshalb nicht denkt, weil die Mathematik für ihn in erster Linie durch in sich geschlossene Systeme rechnerischer Ableitung repräsentiert wird. Als konkretes Beispiel für eine solche weitere Perspektive in historischer Absicht sei etwa an Erhard Scholz' Untersuchung über den Einfluss von Johann Friedrich Herbarts Philosophie auf Bernhard Riemanns Forschung insbesondere über die Natur des Raumes erinnert (siehe Scholz 1982).

2.4 Der letzte Gedanke berührt einen Aspekt von Wittgensteins Nachdenken über die Mathematik, dessen potentieller Nutzen für die Mathematikgeschichtsschreibung nicht ohne weiteres klar ist. An diesem Punkt scheint auch die Überschneidung mit Goldsteins Ansatz problematisch zu werden. Ich meine Wittgensteins Trennung von »Kalkül« und »Prosa«, von der wir schon oben (in 1.10) gesehen haben, dass er sie auch gelegentlich bei der Trennung der bloßen Satzaussage von dem sinnvollen, d. h. mit Beweismethode gegebenen Satz benutzt. Vor allem diente ihm diese Unterscheidung dazu, angebliche Grundlagenprobleme als Scheinprobleme zu entlarven – vgl. das Zitat über den »merkwürdigen Irrtum der Mathematiker« am Ende von 1.4 oben.

An anderen Stellen stellt Wittgenstein den Kalkül der Theorie gegenüber (z. B. WWK 129 und 133). In allen Fällen aber scheint es ihm darum zu gehen, eine Art inneren Bereich der Mathematik, ein in sich geschlossenes und als solches auch unangreifbares System zu isolieren und es dadurch auch dem Zugriff bestimmter Fragen zu entziehen, die angeblich nur bei gewissen Interpretationen des Systems entstehen.

Wenn ich auch nicht viele Beispiele kenne, die innerhalb ein und derselben mathematischen Kultur spielen, so gibt es doch Konstellationen der Mathematikgeschichte, auf die diese Art der Analyse genau zu passen scheint. Dies sind Fälle, in denen Überlegungen – Wittgenstein würde sagen: Rechnungen – eines Mathematikers A von einem Kollegen B deshalb für falsch erklärt werden, weil B auf eine andere Überlegung oder Rechnung Bezug nimmt, die nur scheinbar mit derjenigen A's kompatibel ist. Solche Fälle verlangen vom Mathematikhistoriker in der Regel, sich um die Folgerichtigkeit der ursprünglichen Überlegungen As unabhängig davon zu kümmern, zu welchem falschen Resultat sie im Lichte späterer Lesarten zu führen scheinen.

Ein interessanter Fall, der wegen der späteren NS-Karriere seines Autors sogar eine politische Dimension bekam, ist Theodor Vahlens vorgebliches Beispiel einer Raumkurve, die sich nicht als Schnitt von nur drei Flächen im Raum gewinnen lässt; man braucht dazu laut Vahlen mindestens vier Flächen (vgl. Vahlen 1891). Dieses Beispiel wurde von Oskar Perron angeblich widerlegt (Perron 1941), woraus dann ein längerer Streit zweier (auch politischer) Lager entstand. Mit einiger (mathematischer!) Mühe lässt sich heute im Rückblick zeigen, dass die beiden Lager nicht dieselben Anzahlen (von zur »Gewinnung« der Kurve benötigten Flächen) berechnet haben; die von Vahlen richtig berechnete Anzahl »mindestens vier« konnte man allerdings in der algebraischen Geometrie vor ca. 1955 gar nicht benennen.[40] So entstand der Konflikt, in Wittgenstein'scher Analyse: aufgrund der nicht hinreichend ausdifferenzierten Prosa, in der die Resultate der verschiedenen Rechnungen so formuliert wurden, als hätten Vahlen und Perron dasselbe berechnet – aber mit sich widersprechenden Ergebnissen.

2.5 Bereicherungen des Wittgenstein'schen Ansatzes, die sogar ohne die historische Perspektive nahe liegen, sind vor allem folgende. Die erste sei hier anhand der Schachspielmetapher erläutert. Das, was eine Stellung im Schachspiel bedeutet, lernt man – manchmal schmerzhaft, jedenfalls aber am besten – durch den weiteren Verlauf des Spiels, also durch das, was aus ihr folgt oder folgen kann. Ganz im Sinne des ursprünglichen Verifikationismus, dem zufolge der Sinn eines Ausdrucks oder eines Satzes sein Gebrauch ist, sollten also die mathematischen Aussagen, die sich aus einem Satz ableiten lassen, ebenfalls zu dessen Sinn beitragen.

Fragt man z. B. – durchaus im Lichte der Wittgenstein'schen Auffassungen –, welchen Sinn die (nach wie vor unbewiesene) *Riemann'sche Vermutung* (»RH«) über die Nullstellen der *Riemann'schen Zetafunktion* (und eine gewisse, »GRH« abgekürzte Verallgemeinerung dieser Vermutung) hat, so sind mindestens drei Aspekte zu erwähnen.

2.5.1 Die enorme mathematische Literatur, die vielfältig (in der Mathematik) nützliche Sätze aus RH und besonders aus GRH ableitet. So gibt es in der Tat ganze mathematische Theorien, die in zwei Fassungen existieren: einer schwachen mit komplett bewiesenen Sätzen und einer

40 Ein Text über diesen interessanten Fall ist in Vorbereitung. Beim Verstehen des Sachverhaltes hat mir Frank-Olaf Schreyer (Saarbrücken) große Hilfe geleistet.

starken und für die Anwendungen in der Regel ungleich nützlicheren Fassung, deren Sätze erst in dem Moment gültig werden, in dem GRH bewiesen ist. All diese Schattenmathematik, die sich RH's wie eines Axioms bedient, trägt ohne Zweifel zum Sinn von RH sozusagen rückwirkend bei.[41]

2.5.2 Die analogen Aussagen über Zetafunktionen zu Varietäten über endlichen Körpern sind bewiesen.[42] Die Betrachtung solcher Analogien scheint mir die zweite, unerlässliche Ergänzung des Wittgenstein'schen Ansatzes zu sein.

2.5.3 Ausgehend von den angedeuteten Analogien wurden in den letzten zwanzig Jahren mehrere neue potenzielle Beweisansätze vorgeschlagen (etwa von Alain Connes oder von Christopher Deninger), die jedoch bisher ebenso wenig zum Ziel geführt haben wie stärker analytisch ausgerichtete Versuche. Ein jeder Ansatz bringt einen potenziellen Beweishorizont mit sich, der der Vermutung einen neuen (potenziellen) Sinn abgewinnt.

Diese knappen Andeutungen mögen eine Vorstellung davon geben, wie ich mir eine von Wittgenstein'schen Einsichten geleitete historische Betrachtung mathematischer Praxis vorstelle. Den größten Nutzen der Orientierung an Wittgenstein sehe ich dabei darin, dass sie ein wirksames Gegengewicht zum Diskurs (zur *Prosa*) der Mathematiker darstellt.

41 Vgl. zur neuen Rolle von Vermutungen in der aktuellen Mathematik (einer Rolle, die zu Wittgensteins Zeiten so kaum absehbar war) Mazur 1997, 197–210.

42 Für eine quasi philosophische Darstellung dieser Analogien, die sich allerdings sehr an den Sprachgebrauch der Mathematiker anschmiegt, vgl. Kapitel 4 in Corfield 2003. Um Wittgensteins Bedenken gegen Analogien (siehe etwa WWK 110, 143 ff.) zu begegnen, muss natürlich viel genauer auf die sehr präzisen Übersetzungsprozeduren zwischen den hier angezogenen Kalküls Bezug genommen werden. Erst eine solche formale Präzision erlaubt es, in sehr genau reglementierter Weise die totale Isolierung der inkompatiblen Kalküls durch eine wohlbestimmte Relation zwischen ihnen zu ersetzen.

Literatur

Siglen der abgekürzt zitierten Werke Wittgensteins

Vorbemerkung:
Sofern nicht anders angegeben, werden die Schriften Wittgensteins nach der Werkausgabe in acht Bänden, Frankfurt/M. 1984, zitiert. Manuskripte (MS) und Typoskripte (TS) der Schriften Wittgensteins sind als Faksimile und in Transkription zugänglich in: Wittgensteins Nachlass. Bergen Electronic Edition, Oxford 2000.

AM *Aufzeichnungen, die G. E. Moore in Norwegen nach Diktat niedergeschrieben hat, April 1914*, in: Werkausgabe, Bd. 1.

BB *Preliminary Studies for the »Philosophical Investigations« Generally Known as* The Blue and Brown Books, Oxford ²1969.

BGM *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Werkausgabe, Bd. 6.

BPP *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*, Bd. I und II, in: Werkausgabe, Bd. 7.

BT *›The Big Typescript‹*, WA, Bd. 11.

BW *Ludwig Wittgenstein: Briefwechsel. Innsbrucker elektronische Ausgabe*, hrsg. von Monika Seekircher, Brian McGuinness und Anton Unterkircher im Auftrag des Forschungsinstituts Brenner-Archiv, Innsbruck 2004.

EWA Michael Nedo: *Ludwig Wittgenstein: Wiener Ausgabe. Einführung*, Wien und New York 1993.

KgE *Philosophische Untersuchungen. Kritisch-genetische Edition*, hrsg. von Joachim Schulte in Zusammenarbeit mit Heikki Nyman, Eike von Savigny und Georg Henrik von Wright, Frankfurt/M. 2001.

LS II *Letzte Schriften über die Philosophie der Psychologie: Das Innere und das Äußere, 1949–1951*, hrsg. v. Georg Henrik von Wright und Heikki Nyman, Frankfurt/M. 1993.

PB *Philosophische Bemerkungen*, Werkausgabe, Bd. 2.

PG *Philosophische Grammatik*, Werkausgabe, Bd. 4.

PU *Philosophische Untersuchungen*, in: Werkausgabe, Bd. 1.

T *Tractatus Logico-philosophicus/Logisch-Philosophische Abhandlung*, in: Werkausgabe, Bd. 1.

TB *Tagebücher 1914–1916*, in: Werkausgabe, Bd. 1.

ÜG *Über Gewißheit*, in: Werkausgabe, Bd. 8.

V *Vorlesungen Cambridge 1932–1935*. Aus den Aufzeichnungen von Alice Ambrose und Margaret MacDonald hrsg. von Alice Ambrose, in: *Ludwig Wittgenstein. Vorlesungen 1930–1935*, Frankfurt/M. 1984.

VB *Vermischte Bemerkungen. Eine Auswahl aus dem Nachlaß*, hrsg. von Georg

Henrik von Wright unter Mitarbeit von Heikki Nyman. Neubearbeitung des Textes durch Alois Pichler, Frankfurt/M. 1994.

VG *Vorlesungen und Gespräche über Ästhetik, Psychologie und Religion.* Zusammengestellt und hrsg. aus Notizen von Yorick Smythies, Rush Rhees und James Taylor von Cyril Barrett, Düsseldorf u.a. 1994.

VGM *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik. Cambridge 1939.* Nach Aufzeichnungen von R.G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees und Yorick Smythies, hrsg. von Cora Diamond (= Schriften 7), Frankfurt/M. 1978.

WA *Ludwig Wittgenstein. Wiener Ausgabe*, hrsg. von Michael Nedo, Wien und New York 1995 ff.

WWK *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis. Gespräche aufgezeichnet von Friedrich Waismann*, aus dem Nachlaß hrsg. von Brian F. McGuinness. Werkausgabe, Bd. 3.

Z *Zettel*, in: Werkausgabe, Bd. 8.

Literaturverzeichnis

Anderson, A.R. 1964: «Mathematics and the ›Language Game‹«, in: Bernacerraf, P. und Putnam, H. (Hg.) 1964, 481–490.

Barker-Plummer, D. et al. (Hg.): 2002: *Words, Proofs, and Diagrams*, Stanford, Cal.: CSLI Publications.

Bays, T. 2004: »On Floyd and Putnam on Wittgenstein and Gödel«, in: *Journal of Philosophy* 101, 197–210.

Bearn, G.C.F. 1997: *Waking to Wonder: Wittgenstein's Existential Investigations*, Albany, N.Y: State University of New York Press.

Benacerraf, P. und Putnam, H. (Hg.) 1964: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Englewood Cliffs, NJ: Prenctice-Hall.

Bergson, H. 1888: *Essai sur les données immédiates de la conscience* (zitiert nach der Édition du centennaire 1959, hrsg. von Robinet, A., Paris: Presses universitaires de France).

Bernays, P. 1964: »Comments on Ludwig Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*«, in: Benacerraf, P. und Putnam, H. (Hg.) 1964, 510–528.

Borel, E. 1908: »Les ›Paradoxes‹ de la théorie des ensembles«, in: *Annales de l'ENS* 25, 3, 443–448.

Brouwer, L.E.J. 1929: »Mathematik, Wissenschaft und Sprache«, in: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 1, 153–164.

– 1930: *Die Struktur des Kontinuums*, Wien: Selbstverlag.

Brown, J.R. 1999: *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, New York: Routledge.

Budd, M. 1989: *Wittgenstein's Philosophy of Psychology*, New York: Routledge.

Buldt, B. 2002: »Philosophische Implikationen der Gödelschen Sätze? Ein Bericht«, in: *Kurt Gödel. Kompendium zum Werk*, Bd. 2: *Wahrheit und Beweisbarkeit*, hrsg. von Buldt, B. et al., Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft, 395–438.

Cantor, G. 1872: »Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen«, in: *Mathematische Annalen* 5, 123–132 (wieder abgedruckt in: ders. 1932, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. von Zermelo, E., Berlin: Julius Springer, 92–101.

Cavell, S. 1976: »Aesthetic Problems of Modern Philosophy«, in: ders., *Must We Mean What We Say?* New York: Oxford University Press.

Corcoran, J. et al. 1974: »String Theory«, in: *The Journal of Symbolic Logic* 39, 625–637.

Corfield, D. 2003: *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Dahms, H.-J. 1981: »Verifikationismus und Mathematik bei Wittgenstein«, in: Horscher, E. und Stranzinger, R. (Hg.): *Ethik. Grundlagen, Probleme und Anwendungen. Akten des Fünften Internationalen Wittgenstein-Symposiums 1980*, Wien: öbv & hpt verlagsgesellschaft, 443–447.

Dedekind, R. 1872: »Stetigkeit und irrationale Zahlen« (wieder abgedruckt in: ders. 1932, *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3. Hg. von Fricke, R. et al., Braunschweig: Vieweg, 315–334).

Detlefsen, M. 1986: *Hilbert's Program*, Dordrecht: D. Reidel.

– 2005: »Formalism«, in: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, hrsg. von Shapiro, St., Oxford: Oxford University Press, 236–317.

Diamond, C. 1991: *The Realistic Spirit*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Dreben, B. und Floyd, J. 1991: »Tautology: How not to Use a Word«, in: *Synthese* 87, 1, 23–50.

Dummett, M. 1978a: »The Justification of Deduction«, in: ders., *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth, 290–318.

– 1978b: »Wittgenstein's Philosophy of Mathematics«, in: ders. 1978, *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth, 166–185.

Ebbinghaus, H. D. et al. (Hg.) 1992: *Zahlen*, Berlin: Springer, 3. Aufl.

Einstein, A. 1918: Brief an Eduard Study vom 25.09.1918, in: ders. 1998: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Bd. 8/B: *The Berlin Years: Correspondence, 1914–1918*, hrsg. von Schulmann, R. et al., Cambridge, Mass: Princeton University Press, 890 f.

– 1921: »Geometrie und Erfahrung« (zitiert nach dem Wiederabdruck in: ders. 2002, *The Collected Papers of Albert Einstein*, Bd. 7: *The Berlin Years: Writings, 1918–1921*, hrsg. von Janssen, M. et al., Cambridge, Mass.: Princeton University Press, 383–402).

Ekman, P. 2003: *Emotions Revealed: Recognizing Faces and Feelings to Improve Communication and Emotional Life*, New York: Henry Holt.

Epple, M. 1999: *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Braunschweig und Wiesbaden: Vieweg.

– 2000a: »Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860–1910«, in: Jahnke, H.N. (Hg.): *Geschichte der Analysis*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 371–410.

– 2000b: »Did Brouwer's Intuitionistic Analysis Satisfy its own Epistemological Standards?«, in: Hendricks, K.F. et al. (Hg.): *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, Dordrecht u.a.: Kluwer, 153–178.

Euklid 1933: *Die Elemente*, übers. und hrsg. von Thaer, V.C., Leipzig. Neudruck 1991: Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Feferman, S. 1998: »Weyl Vindicated: *Das Kontinuum* Seventy Years Later«, in: ders., *In the Light of Logic*, New York und Oxford: Oxford University Press, 249–283.

– 2000: »The Significance of Weyl's *Das Kontinuum*«, in: Hendricks, V.F et al. (Hg.): *Proof Theory. Historical and Philosophical Significance*, Dordrecht u.a.: Kluwer, 179–194.
Flasch, K. 1993: *Was ist Zeit? Augustinus von Hippo. Das XI. Buch der* Confessiones, Frankfurt/M.: Klostermann.
Floyd, J. 1995: »On Saying what You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle«, in: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, hrsg. von Hintikka, J., Dordrecht u.a.: Kluwer, 373–425.
– 2000: »Wittgenstein, Mathematics, and Philosophy«, in: *The New Wittgenstein*, hrsg. von Crary, A. und Read, R., London u.a.: Routledge, 232–261.
– 2001: »Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski, and Truth«, in: *Philosophia Mathematica* 9, 3, 280–307.
– 2005: »Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics«, in: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, hrsg. von Shapiro, St., Oxford: Oxford University Press, 75–128.
– (im Erscheinen): »On Being Surprised: Wittgenstein on Aspect Perception, Logic and Mathematics«, in: Krebs, V. und Day, W. (Hg.): *Seeing Wittgenstein Anew: New Essays on Aspect Seeing*, Cambridge: Cambridge University Press.
Floyd, J. und Putnam, H. 2000: »A Note on Wittgenstein's Notorious Paragraph about the Gödel Theorem«, in: *Journal of Philosophy* 97, 624–632.
– 2006: »Bays, Steiner, and Wittgenstein's ›Notorious‹ Paragraph About the Gödel Theorem«, in: *Journal of Philosophy* 103, 2, 101–110.
Fogelin, R. 1987: *Wittgenstein*, New York: Routledge & Kegan Paul, 2. Aufl.
Frascolla, P. 1994: *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, London u.a.: Routledge.
Frege, G. 1891: »Funktion und Begriff«, in: ders. 1969: *Funktion, Begriff, Bedeutung*, hrsg. von Patzig, G., Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 3. Aufl., 18–39.
– 1893: *Grundgesetze der Arithmetik*, 1. Bd. Nachdruck 1962: Hildesheim, Georg Olms.
– 1897: »Logik«, in: ders. 1983, 137–163.
– 1903: *Grundgesetze der Arithmetik*, 2. Bd. Nachdruck 1962: Hildesheim: Georg Olms.
– 1906: »Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae«, in: ders. 1990: *Kleine Schriften*, hrsg. von Angelelli, I., Hildesheim: Georg Olms, 2. Aufl., 324–328.
– 1908: »Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen«, in: ders. 1990: *Kleine Schriften*, hrsg. von Angelelli, I., Hildesheim: Georg Olms, 2. Aufl., 329–333.
– 1983: *Nachgelassene Schriften*, hrsg. von Hermes, H. et al., Hamburg: Meiner, 2. Aufl.
Frei, G. und Stammbach, U. 1992: *Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich 1913–1930*, Basel u.a.: Birkhäuser.
Gerrard, S. 1991: »Wittgenstein's Philosophies of Mathematics«, in: *Synthese* 87, 1, 125–142.
Gilain, Chr. 1991: »Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: Théorie des équations et calcul intégral«, in: *Archive for History of Exact Sciences* 42, 91–136.
Glock, H.-J. 2000: *Wittgenstein-Lexikon*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Gödel, K. 1931: »Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme«, in: ders. 1986, *Collected Works*, Bd. 1: *Publications 1929–1936*, New York: Oxford University Press 145–195.

– 1944: »Russell's Mathematical Logic«, in: Feferman, S. et al. (Hg.) 1989: *Kurt Gödel. Publications 1938–1974* (= *Collected Works*, Bd. II), New York: Oxford University Press, 119–141.
– 2003a: *Correspondence, A–G* (= *Collected Works*, Bd. IV), hrsg. von Feferman, S. et al., Oxford: Oxford University Press.
– 2003b: *Correspondence, H–Z* (= *Collected Works*, Bd. V), hrsg. von Feferman, S. et al., Oxford: Oxford University Press.
Goldstein, C. 1995: *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis: Presses universitaires de Vincennes.
Gowers, T. 2002: *Mathematics: A Very Short Introduction*, Oxford: Oxford University Press.
Grialou, P. et al. (Hg.) 2005: *Images and Reasoning. Proceedings of an Interdisciplinary Conference Series on Reasoning.* Studie, Tokyo: Keio University Centre for Integrated Research on the Mind.
Grimaldi, R.P. 2004: *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Boston: Pearson/Addison-Wesley, 5. Aufl.
Hacker, P.M.S. 1996: *Wittgenstein: Mind and Will* (= *An Analytical Commentary on the Philosophical Investigations*, Bd. 4), Oxford u.a.: Blackwell.
Hallett, G. 1977: *A Companion to Wittgenstein's »Philosophical Investigations«*, Ithaca: Cornell University Press.
Hardy, G.H. 1940: *A Mathematician's Apology.* Nachdruck 1967, New York: Canto.
– 1941: *A Course of Pure Mathematics*, London: Cambridge University Press, 8. Aufl.
Heijenoort, J. van (Hg.) 1981: *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 4. Aufl.
Hermes, H. 1938: *Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen* (= *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, NF 5).
Hesseling, D.E. 2003: *Gnomes in the Fog. The Reception of Bouwer's Intuitionism in the 1920s* (= *Science Networks. Historical Studies*, Bd. 28), Basel u.a.
Hilbert, D. 1922: »Neubegründung der Mathematik« (zitiert nach: ders. 1964, *Hilbertiana*, Nachdruck Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 12–32).
– 1922/23: *Wissen und mathematisches Denken. Vorlesung im Wintersemester 1922/23.* Ausgearbeitet v. Ackermann, W., hrsg. von Bödigheimer, C.-F., Göttingen: Universität, Mathematisches Institut.
– 1925: »Über das Unendliche« (zitiert nach dem Nachdruck in: ders. 1964, *Hilbertiana*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 79–108).
– 1928: *Die Grundlagen der Mathematik* (= *Hamburger Mathematische Einzelschriften*, 5), Leipzig: Teubner.
– und Bernays, P. 1968: *Grundlagen der Mathematik I*, Berlin u.a.: Springer, 2. Aufl.
Hintikka, J. 2000: *On Gödel*, Belmont, Cal.: Wadsworth.
Hopkins, J. 2004: »Wittgenstein and the Life of Signs«, in: *Wittgenstein's Lasting Significance*, hrsg. von Kölbel, M. und Weiss, B., London: Routledge, 110–147.
Husserl, E. 1913: *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Halle: Niemeyer.
Kanamori, A. 2005a: *Set-Theoretic and Mathematical Knowledge: Beyond True and False*, Manuskript.
– 2005b: *The Higher Infinite*, New York: Springer, 2. Aufl.

Kennedy, J. (Manuskript): *On Reading Mathematical Constructions as Works of Art.*

Kienzler, W. 1997: *Wittgensteins Wende zu seiner Spätphilosophie 1930–1932*, Frankfurt/M.: Suhrkamp.

– 2002: »Das EPR-Paradox: Einstein, Bohr und Wittgenstein«, in: Haller, R. und Puhl, K. (Hg.): *Wittgenstein und die Zukunft der Philosophie. Eine Neubewertung nach 50 Jahren. Beiträge des 24. Internationalen Wittgenstein Symposiums 2001*, Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft, 182–196.

King, J. 1987: »Erinnerungen an Wittgenstein«, in: Rhees, R. (Hg.): *Ludwig Wittgenstein. Porträts und Gespräche*, Frankfurt/M.: Suhrkamp, 107–116.

Klenk, V.H. 1976: *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Den Haag: Nijhoff.

Kowalewski, S. 1968: *Jugenderinnerungen*, Frankfurt/M: S. Fischer.

Kripke, S. 1987: *Wittgenstein über Regeln und Privatsprache*, Frankfurt/M.: Suhrkamp.

Maddy, P. 1997: *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Malcolm, N. 1987: *Erinnerungen an Wittgenstein. Mit einer biographischen Skizze von Georg Henrik von Wright und Wittgensteins Briefen an Norman Malcolm*, Frankfurt/M.: Suhrkamp.

Mancosu, P. 1998: *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York und Oxford: Oxford University Press.

– et al. (Hg.) 2005: *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*, New York: Springer.

Mazur, B. 1997: »Conjecture«, in: *Synthese* 111, 197–210.

– 2004: *Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen)*, London u.a.: Penguin Books.

Mehrtens, H. 1990: *Moderne, Sprache, Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt/M.: Suhrkamp.

Monk, R. 1992: *Wittgenstein: Das Handwerk des Genies*, Stuttgart: Klett-Cotta.

Moore, G.E. 1925: »Eine Verteidigung des Common Sense«, in: ders. 1969, *Eine Verteidigung des Common Sense. Fünf Aufsätze aus den Jahren 1903–1941*. Frankfurt/M.: Suhrkamp, 113–151.

– 1939: »Beweis einer Außenwelt«, in: ders. 1969, *Eine Verteidigung des Common Sense. Fünf Aufsätze aus den Jahren 1903–1941*, Frankfurt/M.: Suhrkamp, 153–184.

– 1959: *Philosophical Papers*, London: Allen and Unwin.

Mühlhölzer, F. 1999: »Mathematik ohne Metaphysik«, in: Nida-Rümelin, J. (Hg.): *Rationalität, Realismus, Revision*, Berlin: Walter de Gruyter, 416–423.

– 2001: »Wittgenstein and the Regular Heptagon«, in: *Grazer Philosophische Studien* 62, 215–247.

– 2002a: »Regelfolgen und die Identität von Begriffen«, in: *Institutionalität und Regelfolgen*, hrsg. von Baltzer, U. et al., Paderborn: mentis, 137–156.

– 2002b: »Wittgenstein and Surprises in Mathematics«, in: Haller, R. und Puhl, K. (Hg.): *Wittgenstein und die Zukunft der Philosophie. Eine Neubewertung nach 50 Jahren. Beiträge des 24. Internationalen Wittgenstein Symposiums 2001*, Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft, 306–315.

– 2005: »›A Mathematical Proof Must Be Surveyable‹ – What Wittgenstein Meant by This and What it Implies«, in: *Grazer Philosophische Studien* 71, 57–86.

– (im Erscheinen): »Putnam, Wittgenstein, and the Objectivity of Mathematics«, in:

The Philosophy of Hilary Putnam, hrsg. von Auxier, R.E., Chicago und La Salle, Ill.: Open Court.

Mulhall, S. 1990: *On Being in the World: Wittgenstein and Heidegger on Seeing Aspects*, New York: Routledge.

Nedo, M. und Ranchetti, M. 1983: *Ludwig Wittgenstein. Sein Leben in Bildern und Texten*, Frankfurt/M.: Suhrkamp.

Neumann, J. von 1974 [1947]: »Der Mathematiker«, in: *Mathematiker über die Mathematik*, hrsg. von Otte, M., Berlin u.a.: Springer, 29–46.

Norman, J. 2006: *After Euclid: Visual Reasoning and the Epistemology of Diagrams*, Stanford, Cal.: CSLI Publications.

Perron, O. 1941: »Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker«, in: *Mathematische Zeitschrift* 47, 318–324.

Petri, B. und Schappacher, N. 2007: »On Arithmetization«, in: Goldstein, C. et al. (Hg.): *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's* Disquisitiones Arithmeticae, Berlin u.a.: Springer, 341–373.

Poincaré, H. 1910: *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik, auf Einladung der Wolfskehl-Kommission der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften gehalten zu Göttingen vom 22.–28. April 1909*, Leipzig und Berlin: Teubner.

Potter, M. 2000: *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, New York: Oxford University Press.

Priest, G. 2004: »Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem«, in: Kölbel, M. und Weiß, B. (Hg.): *Wittgenstein's Lasting Significance*, London und New York: Routledge, 206–225.

Putnam, H. 1979: »Analyticity and Apriority: Beyond Wittgenstein and Quine«, in: ders., *Realism and Reason* (= *Philosophical Papers*, Bd. 3), Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 115–138.

– 1994: »Philosophy of Mathematics: Why Nothing Works«, in: ders., *Words and Life*, hrsg. von Conant, J., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 499–512.

Ramharter, E. und Weiberg, A. 2006: *»Die Härte des logischen Muß«. Wittgensteins* Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Berlin: Parerga

Ramsey, F. 1926: »The Foundations of Mathematics,« in: *Proceedings of the London Mathematical Society* 25, 2, 338–384.

Rav, Y. 1999: »Why Do We Prove Theorems?,« in: *Philosophia Mathematica* 7, 3, 5–41.

Roberts, F.S. 1984: *Applied Combinatorics*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Rodych, V. 1997: »Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability, and Application«, in: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 38, 195–224.

– 1999: »Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem«, in: *Erkenntnis* 51, 173–206 (wieder abgedruckt in: *Ludwig Wittgenstein. Critical Assessments of Leading Philosophers*, Bd. II, hrsg. von Shanker, S.G. und Kilfoyle, D., London und New York: Routledge 2002, 232–264 (zitiert nach dieser Ausgabe mit Rodych 1999).

– 2002: »Wittgenstein on Gödel: The Newly Published Remarks«, in: *Erkenntnis* 56, 379–397.

Rota, G.-C. 1997: »The Phenomenology of Mathematical Beauty«, in: *Synthese* 111, 171–182.

Russell, B. 1936: »The Limits of Empiricism«, in: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 131–150.

Savigny, E. von 1994: *Wittgensteins »Philosophische Untersuchungen«. Ein Kommentar für Leser*, Bd. I, Frankfurt/M.: Klostermann, 2. Aufl.
– 1998: »Sprachspiele und Lebensformen: Woher kommt die Bedeutung?«, in: *Ludwig Wittgenstein. Philosophische Untersuchungen*, hrsg. von Savigny, E. von, Berlin: Akademie, 7–39.
Scholz, E. 1982: »Herbart's Influence on Bernhard Riemann«, in: *Historia Mathematica* 9, 4134–4140.
Schulte, J. 2006: »Das Leben des Zeichens«, in: *Wittgenstein und die Literatur*, hrsg. von Gibson, J. und Huemer, W., Frankfurt/M.: Suhrkamp, 215–241.
Shanker, S.G. 1987: *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, London u a.: Croom Helm.
– 1988: »Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem«, in: ders., *Gödel's Theorem in Focus*, London u.a.: Croom Helm, 155–256.
– 1998: *Wittgenstein's Remarks on the Foundations of AI*, New York: Routledge.
– und Greenspan, S. 2004: *The First Idea: How Symbols, Language, and Intelligence Evolved from Our Primate Ancestors to Modern Humans*, Cambridge, Mass.: Da Capo Press.
Shapiro, St. 2000: *Thinking about Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
Skolem, Th. 1923: »Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich«, in: *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kritiana, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse* 6, Kristiana: Jac. Dybwad in Komm., 1–38 (engl. Übersetzung mit Einführung van Heijenoorts in: Heijenoort, J. van 1981).
Smith, A. 1795: »The History of Astronomy«, in: ders. 1980, *Essays on Philosophical Subjects*, hrsg. von Wightman, W.P.D und Bryce, J.C., Oxford: Oxford University Press.
Smullyan, R. 1961: *Theory of Formal Systems*, Princeton: Princeton University Press.
Stegmüller, W. 1989: *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*, Bd. 1, Stuttgart: Kröner, 7. Aufl.
Steiner, M. 1996: »Wittgenstein: Mathematics, Regularities, and Rules«, in: *Benacerraf and His Critics*, hrsg. von Morton, A. und Stich, S., Cambridge, Mass.: Blackwell, 190–212.
– 2001: »Wittgenstein as His Own Worst Enemy: The Case of Gödel's Theorem«, in: *Philosophia Mathematica* 3, 257–279.
Stillwell, J. 1989: *Mathematics and its History*, New York: Springer.
Vahlen, Th. 1891: »Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven«, in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 108, 346–347.
Waismann, F. 1947: *Einführung in das mathematische Denken*, Wien: Gerold, 2. Aufl. Neudruck 1996: Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Weyl, H. 1910: »Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe« (zitiert nach dem Wiederabdruck in ders. 1968a, 298–304).
– 1913: *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Leipzig: Teubner.
– 1918a: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlage der Analysis*, Leipzig: Veit.
– 1918b: *Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*, Berlin: Springer.

– 1919: »Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis (Aus einem Briefe an O. Hölder)« (zitiert nach dem Wiederabdruck in: ders. 1968b, 43–50).
– 1921: »Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik« (zitiert nach dem Wiederabdruck in: ders. 1968b, 143–180).
– 1925: »Die heutige Erkenntnislage der Mathematik« (zitiert nach dem Wiederabdruck in: ders. 1968b, 511–542).
– 1927: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, München: R. Oldenbourg.
– 1928: »Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik« (zitiert nach dem Wiederabdruck in: ders. 1968c, 147–149).
– 1966: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München: R. Oldenbourg.
– 1968a: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1, hrsg. von Chandrasekharan, K., Berlin u.a.: Springer.
– 1968b: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, hrsg. von Chandrasekharan, K., Berlin u.a.: Springer.
– 1968c: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, hrsg. von Chandrasekharan, K., Berlin u.a.: Springer.
Wright, C. 1980: *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, London: Duckworth.
– 1993: »Strict Finitism«, in: ders., *Realism, Meaning, and Truth*, Oxford: Blackwell, 2. Aufl., 107–175.