
Le théorème de Cartan-Hadamard dans le cas des surfaces

Claire Schnoebelen
14 septembre 2021

Travail réalisé dans le cadre de la première année de Magistère de Mathématiques,
encadré par Emmanuel Opshtein

Université de Strasbourg
2020-2021

Table des matières

Introduction

Nous nous placerons ici dans le cadre de la géométrie riemannienne. On y étudie la géométrie intrinsèque de ce qu'on appelle des variétés riemanniennes en utilisant deux points de vue : différentiel et métrique. Différentiel en raison de la structure différentielle des variétés étudiées, métrique parce qu'on munit ces dernières d'une métrique riemannienne, un ensemble cohérent de produits scalaires sur les espaces tangents de la variété.

En raison même de la définition des variétés, il arrive fréquemment que des objets ne soient d'abord définis, ou des propriétés initialement valables, qu'au voisinage de chaque point. La difficulté consiste ensuite à les utiliser pour démontrer des résultats sur la variété toute entière, en résumé, à passer du local au global.

Comme exemple de résultat frappant que l'on ne peut obtenir qu'en considérant une variété dans son ensemble, on peut citer le théorème de Gauss-Bonnet, qui stipule que :

Théorème 1 (Gauss-Bonnet). *Sur S , une variété riemannienne compacte de dimension deux, la courbure gaussienne et la caractéristique d'Euler de la surface sont liées par la formule :*

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Toujours en dimension deux, le théorème de rigidité de la sphère donne un autre exemple de résultat global :

Théorème 2 (Rigidité de la sphère). *Une sous-variété de dimension deux compacte et connexe de courbure gaussienne constante est une sphère.*

Si l'on ôte ne serait-ce qu'un seul point de la sous-variété, celle-ci n'est plus compacte et la conclusion du théorème n'est plus vraie : une sphère privée d'un point est difféomorphe à un plan.

Ces résultats montrent que la connaissance de la courbure gaussienne sur l'ensemble de la variété donne des indications sur la forme globale que celle-ci revêt. D'autres théorèmes reposent sur ce principe. Il sera ici question de l'un d'entre eux : le théorème de Cartan-Hadamard.

Nous nous placerons dans le cas particulier des surfaces régulières, c'est-à-dire des sous-variétés de dimension deux dans $\mathbb{R}^3$. La courbure y a en effet une interprétation simple, qui se généralise mal en dimension supérieure. Dans ce cas particulier, le théorème de Cartan-Hadamard prend la forme suivante :

Théorème 3. *Sur une surface régulière simplement connexe, complète, de courbure gaussienne toujours négative ou nulle, l'application exponentielle en un point quelconque est un difféomorphisme entre le plan tangent en ce point et la surface elle-même.*

Les outils mobilisés pour arriver à ce résultat permettent également de montrer que :

Théorème 4. *Sur une surface régulière, connexe, compacte et de courbure gaussienne partout strictement positive l'application de Gauss est un difféomorphisme entre la surface et la sphère.*

Tout ce qui sera utilisé pour parvenir à ces résultats est tiré de M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New-Jersey, 1976. Ce qui a trait, dans la première partie, à la généralisation de notre propos aux sous-variétés et aux variétés de dimension quelconque, est tiré de S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2004.

Nous commençons par définir les concepts de base ayant trait aux surfaces régulières, aisément généralisables aux sous-variétés de dimension quelconque et aux variétés différentielles. Il s'agit d'abord de définir les surfaces régulières elles-mêmes, puis d'en utiliser la structure différentielle pour introduire le

plan tangent, que nous pouvons munir d'une norme, et les notions de différentiabilité et d'application différentielle pour les applications entre surfaces régulières.

Ensuite, nous introduisons la notion de courbure dans le cas particulier des surfaces régulières. Pour cela, il est nécessaire de se restreindre à une certaine catégorie de surfaces, les surfaces orientables.

A partir de la norme que nous avons définie sur les plans tangents, on construit une distance sur S . En cherchant des courbes minimisantes, on en vient à introduire la dérivée covariante le long d'une courbe, puis les géodésiques et enfin l'application exponentielle. Ayant remarqué que cette dernière est un difféomorphisme au voisinage de zéro, on parvient à montrer le théorème de Hopf-Rinow, qui assure la surjectivité de $\exp_p$ dans le cas des surfaces complètes. On introduit ensuite les champs de Jacobi. En montrant, d'une part, qu'il n'existe pas de points conjugués sur une surface si celle-ci est de courbure toujours négative ou nulle et, d'autre part, que $\exp_p$ possède des points critiques si et seulement si S possède des points conjugués, on arrive à montrer que $\exp_p$ est un difféomorphisme local.

La quatrième partie traite de topologie : il y est question de la propriété de relever les arcs et des revêtements. On montre qu'un homéomorphisme local π de source connexe par arcs et de but simplement connexe ayant la propriété de relever les arcs est un homéomorphisme. On montre également qu'un revêtement relève les arcs et on donne des hypothèses faciles à vérifier qui assurent à π d'être un revêtement.

Finalement, il suffit de montrer que l'application exponentielle relève les arcs si la courbure gaussienne est partout négative ou nulle, pour montrer le premier théorème de Hadamard. Le second découle presque immédiatement de tous les résultats précédents.

Notations

Dans tout ce qui suivra, on entendra qu'une application de $\mathbb{R}^n$ est lisse quand elle sera qualifiée de « différentiable ».

On désignera par S une surface régulière, p un point de cette surface et X , dont les variables seront le plus souvent désignées par u et v , une paramétrisation de S au voisinage de p . On notera X_u et X_v les dérivées partielles de X par rapport à u et v , en omettant fréquemment de préciser que ces fonctions prennent leurs valeurs en $X^{-1}(p)$ quand cela est le cas et qu'aucune confusion n'est possible.

1 Les surfaces régulières

1.1 Définition des surfaces régulières

Il s'agit de sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels il est possible d'associer à chaque point, et cela de manière lisse, une paire de coordonnées, de la même manière que dans $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, il s'agit de sous-ensembles localement difféomorphes à $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.1 (Surface régulière). *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ est une surface régulière si pour tout point p de S il existe un voisinage ouvert V de p dans $\mathbb{R}^3$, un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une application $X : U \rightarrow V \cap S$ tels que :*

i) *X est différentiable sur tout U (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$) et pour tout $q \in U$, $d_q X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.*

ii) *X est un homéomorphisme de U dans $V \cap S$*

Les images par X des courbes $u \mapsto (u, a)$ et $v \mapsto (b, v)$, pour a et b des constantes, sont appelées courbes de coordonnées.

A partir de maintenant, dès qu'il sera question d'une surface régulière et de l'une de ses paramétrisations, on supposera que cette dernière satisfait les conditions de la définition précédente.

Notons que la définition donnée ci-dessus n'utilise aucune propriété particulière à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On peut très bien définir des objets semblables en remplaçant ces espaces par $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, avec n et m des entiers naturels non nuls quelconques. Un tel ensemble est appelé *sous-variété* de dimension n et les surfaces régulières ne sont rien d'autre que des sous-variétés de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Toujours dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir des sous-variétés de dimension un, qu'on appellera par exemple *courbes régulières*.

On pourrait donner une définition moins restrictive d'une sous-variété en exigeant simplement que les applications coordonnées X soient $\mathcal{C}^0$ et non plus lisses. On précise alors qu'une sous-variété est de classe $\mathcal{C}^p$, pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, s'il est possible de la recouvrir par un ensemble de paramétrisations $(X_i : U_i \rightarrow S)_{i \in I}$ de classe $\mathcal{C}^p$.

Exemple 1.1 (Le plan). Le plan $\mathbb{R}^2$, vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, constitue un exemple basique de surface régulière, l'application

$$i : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto (u, v, 0) \end{cases}$$

satisfaisant bien la définition et suffisant à recouvrir complètement la surface.

En reprenant les notations de la définition, chaque point point de $V \cap S$ peut être identifié à un point de U par le biais de n coordonnées. Dans le cas du plan, cette identification est extrêmement simple puisqu'elle consiste à ne considérer que les deux premières coordonnées de chaque point dans la base canonique et une seule application, la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan, suffit à munir celui-ci d'une structure de surface régulière. Cela n'est pas toujours possible, et c'est de ce constat que provient l'intérêt de la définition de surfaces régulières.

Exemple 1.2 (La sphère). Prenons par exemple la sphère S^2 (pour la norme euclidienne). Il est tout-à-fait impossible de la recouvrir par un unique voisinage de coordonnées comme cela a été fait pour le plan. En effet, la sphère est compacte, au contraire de n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$, à qui elle ne peut donc pas être homéomorphe. Cela est intuitivement clair : il n'est pas possible "d'étaler" une sphère sur un plan sans la déchirer ou superposer deux parties distinctes.

Il est en revanche possible de trouver des ouverts et de construire des applications satisfaisant les conditions de la définition, de la même façon qu'il est possible de déformer une portion de la surface terrestre pour en faire une carte. En effet, considérons l'application

$$X : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) & \mapsto (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \end{cases}$$

Elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produits et composées de fonctions différentiables, et sa jacobienne est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Si le premier mineur est nul, alors $\cos \theta$ ou $\sin \theta$ est nul. Puisque ces deux termes ne peuvent être nuls en même temps, si $\sin \theta$ est nul, alors $\cos \theta$ ne l'est pas et l'un des deux autres mineurs, à savoir $\cos \theta \cos \phi$ ou $\cos \theta \sin \phi$ est non nul. Il s'en suit que $d_{(\theta, \phi)}X$ est injective dès que θ n'est pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, i.e. dès que $X(\theta, \phi)$ n'est ni le pôle Nord, ni le pôle Sud.

D'autre part, si (θ, ϕ) et (θ', ϕ') sont tels que $X(\theta, \phi) = X(\theta', \phi')$, alors $\cos \theta = \cos \theta'(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \theta'(\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi') = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$, d'où $\theta = \theta' \bmod 2\pi$. De la même manière, $\phi = \phi' \bmod 2\pi$, ce qui fait une injection de toute restriction de X sur un produit d'intervalles ouverts de longueurs inférieures à 2π , par exemple $U =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[$ et $U' =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Notons X_1 et X_2 les restrictions de X à U et U' .

L'image de X est clairement comprise dans S^2 et, réciproquement, contient tout S^2 . Plus précisément, les applications

$$Y : (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (\arcsin z, \operatorname{arccotan} \frac{x}{y}) & \text{si } y \geq 0 \\ (\arcsin z, \operatorname{arccotan} \frac{x}{y}) + \pi & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

à valeurs sur la sphère privée du demi-cercle contenu dans le demi-plan Oxz aux x positifs et

$$Z : (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (\arcsin z, \arctan \frac{y}{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ (\arcsin z, \arctan \frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

à valeurs dans le demi-plan Oyz aux y positifs, sont les réciproques respectives de X_1 et X_2 , qui sont donc bijectives.

Aussi bien X , et a fortiori toutes ses restrictions, que Y et Z sont continues, et cette remarque achève de montrer que X_1 et X_2 sont des homéomorphismes de S^2 privée d'un demi grand-cercle vers U ou U' . Les demi-cercles en question ne s'intersectant qu'aux pôles Nord et Sud, les applications X_1 et X_2 munissent S^2 privée de ces deux points d'une structure de surface régulière.

Composons à présent X avec la rotation R d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe Ox . En tant qu'application linéaire inversible dans un espace vectoriel de dimension finie, R est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Puisque R laisse stable S^2 , $R \circ X$ est encore une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et sa différentielle est non-inversible uniquement aux images E et F des pôles Nord et Sud par R . En outre, la restrictions de $R \circ X$ à U n'est autre que $R \circ X_1$, dont il apparait clairement qu'il s'agit d'un homéomorphisme entre son espace de départ et S^2 privée d'un demi grand-cercle, d'origines E et F . Comme précédemment, $R \circ X_1$ satisfait donc les conditions de la définition.

Les ouverts $X_1(U)$, $X_2(U')$ et $R \circ X_1(U)$ suffisent à recouvrir S^2 , ce qui munit bien la sphère d'une structure de surface régulière.

Remarquons que dans l'exemple précédent, les paramétrisations choisies sur S sont loin d'être les seules possibles, ne serait-ce qu'en raison de l'angle et de l'axe de R , qu'on aurait très bien pu définir autrement. Il en vient une question importante. Supposons que sur une surface régulière S il existe deux voisinages de coordonnées dont l'intersection est non nulle. Les points de cette intersection se trouvent donc affectés, par le biais des applications coordonnées correspondantes X et Y , à deux paires de coordonnées différentes. Pour des raisons de cohérence dans la définition d'une surface régulière, on s'attend à ce que ces deux affectations soient équivalentes d'un point de vue différentiel. En fait, on peut montrer :

Proposition 1.1. *Soit S une surface régulière et $X : U \rightarrow S$, $Y : V \rightarrow S$ deux paramétrisations de S telles que $X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$. L'application $X^{-1} \circ Y : V \cap Y^{-1}(X(U)) \rightarrow X(U) \cap Y(V)$ est un difféomorphisme et est appelée changement de carte.*

Démonstration. Notons $W = X(U) \cap Y(V)$ et soient q un point de $Y^{-1}(W)$, p son image par Y et r l'image réciproque de ce point par X .

Puisque X est une immersion, sa jacobienne au point p possède un mineur non-nul. Quitte à permuter les variables, on peut supposer qu'il s'agit du premier.

On introduit alors l'application $F : \begin{cases} X^{-1}(W) \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) & \mapsto X(u, v) + (0, 0, t). \end{cases}$

Elle est $\mathcal{C}^1$ comme somme de telles applications et sa jacobienne en $(r, 0)$, qui prend la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ J_X((r, 0)) & 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a pour déterminant le premier mineur de la jacobienne de X en r , que l'on a supposé différent de zéro.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage M de $F(r, 0)$ dans $F(X^{-1}(W) \times \mathbb{R})$ sur lequel F^{-1} est correctement définie et différentiable.

Par continuité de Y , il existe un voisinage N de q dans $Y^{-1}(W)$ tel que $Y(N) \in M$. Sur N , $X^{-1} \circ Y$ est égale à $F^{-1} \circ Y$ et est, à ce titre, différentiable en q .

En intervertissant les rôles de X et Y dans ce qui précède, on montre également que $Y^{-1} \circ X$ est différentiable en tout point de $X^{-1}(W)$. Ainsi, $Y^{-1} \circ X$ et son inverse étant toutes deux correctement définies et différentiables au voisinage de tout point de $X^{-1}(W)$, respectivement $Y^{-1}(W)$, on peut en conclure qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme. $\square$

Les propositions précédentes se généralisent en dimension supérieure, au cas des sous-variétés de dimension quelconque. Pour une sous-variété de classe $\mathcal{C}^p$, les applications de changement de carte sont de classe $\mathcal{C}^p$. Cela est une conséquence de leur définition.

On peut introduire une notion plus générale que celle de sous-variété de classe $\mathcal{C}^p$ en demandant que cette propriété ne soit plus seulement nécessaire, mais aussi suffisante. Plus précisément :

Définition 1.2 (Variétés). *Soit S un espace topologique séparé.*

On dit que S est une variété topologique de dimension n si tout point de S admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble de ce voisinage et de cet homéomorphisme est appelé carte. Un ensemble de cartes dont les ouverts suffisent à recouvrir S est un atlas de S .

Si on peut trouver un atlas tel que tous les changements de carte sont $\mathcal{C}^p$, alors on dit que S est une variété différentielle de dimension n et de classe $\mathcal{C}^p$.

Revenons aux sous-variétés et aux surfaces régulières. En ce qui concerne le point de vue différentiel, une sous-variété se comporte localement comme $\mathbb{R}^n$. Pour étudier les propriétés locales de tels objets, il sera commode d'utiliser ce fait et de considérer les surfaces régulières du point de vue des ouverts du plan auxquels elles sont difféomorphes, objets plus simples et sur lesquels on dispose déjà de nombreux outils : mesures, produits scalaires, notion d'application différentiable, etc. Pour construire de tels outils sur les surfaces régulières, se ramener localement au cas de $\mathbb{R}^2$ donne une façon, comme on le verra par la suite, d'y parvenir.

Une autre façon de considérer les surfaces régulières est de se ramener à l'espace dans lequel elles sont incluses. En effet, en tant que sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, elles en héritent certaines notions, le produit scalaire par exemple. On voudrait toutefois pouvoir s'affranchir de l'espace ambiant et étudier les surfaces régulières sans avoir à faire référence à $\mathbb{R}^3$.

1.2 Comportement local des surfaces régulières : plan tangent et première forme fondamentale

Afin de se représenter plus facilement ce qu'est une surface régulière et d'en introduire certaines propriétés, il peut être intéressant d'en donner un autre interprétation. Intuitivement, et cela justifie la

terminologie en vigueur, les surfaces régulières sont des sous-ensembles "plats" et lisses de $\mathbb{R}^3$, autrement dit des portions de plan déformés et éventuellement collés, à condition toutefois que l'espace ainsi formé ne contienne ni brisure, ni auto-intersection. Imaginés de cette façon, il n'en faut plus beaucoup à ces espaces pour être vus localement comme les graphes de fonctions lisses de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Essayons de construire, à partir des paramétrisations données par la définition, de telles fonctions $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit S une surface régulière, $p = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S et U, V et $X : U \rightarrow V \cap S$ comme dans la Définition ???. Soit $q = (u_0, v_0)$ l'antécédant de p par X . Puisque $d_q X$ est injective, $J_X(q)$ possède un mineur non nul. Quitte à permuter les fonctions coordonnées de X , on peut supposer qu'il s'agit du premier. On notera A la sous-matrice dont il s'agit du déterminant.

Introduisons une première fonction auxiliaire, qui envoie $(q, 0)$ sur p :

$$F : \begin{cases} U \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) & \mapsto X(u, v) + (0, 0, t). \end{cases}$$

Remarquons qu'alors $F(U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) = X(U) = V \cap S$.

La jacobienne de F prend la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

avec $(* \quad *)$ un vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$.

Puisque A est inversible, $J_F(q, 0)$ est inversible également, ce qui nous permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à F . Il existe donc un voisinage ouvert W de $(q, 0)$ dans $U \times \mathbb{R}$ tel que la restriction de F à W soit un difféomorphisme sur son image. En particulier, F possède une inverse lisse sur W . Quitte à remplacer W et U par $W \cap (U \times \mathbb{R})$, forcément ouvert et non nul car intersection de voisinages ouverts de $(q, 0)$, on peut supposer que $W = U \times I$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Notons $g : F(U \times I) \rightarrow \mathbb{R}$ la troisième application coordonnée de F^{-1} . Alors $g^{-1}(0) = F(U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) = V \cap S$.

La jacobienne de F^{-1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & v \\ * & c \end{pmatrix}.$$

Dans la mesure où $J_F(q, 0) \times J_F^{-1}(F((q, 0))) = I_3$, $A \cdot v$ doit être nul, ce qui implique, par injectivité de A , que v est nul. Il s'en suit que $c = 1$ et donc que $d_{F(q, 0)}^{\mathbb{R}} g$ est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert O de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un intervalle ouvert J contenant z_0 et une fonction lisse $\phi : O \rightarrow J$ telle que :

$$\{(x, y, z) \in O \times J \mid g(x, y, z) = g(p) = 0\} = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in O\}.$$

Quitte à restreindre O et J , on peut supposer que $O \times J \in F(U \times I)$.

Or, d'après ce qui précède, l'ensemble précédent n'est autre que $V \cap S$, ce qui montre qu'au voisinage V de p , S est le graphe de ϕ , qui se trouve par conséquent être une application correspondant à ce que nous cherchions.

Réciproquement, notons qu'étant donné le graphe Γ d'une fonction lisse $\phi : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il est toujours possible de trouver une paramétrisation X de $O \times \phi(O)$ satisfaisant les conditions de la Définition ??? pour tout p dans Γ . Il suffit pour cela de reprendre les étapes précédentes dans l'ordre inverse.

A partir de ϕ , l'existence d'une submersion $g : O \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ est donnée par l'expression $(x, y, z) \mapsto \phi(x, y) - z$. En effet, la jacobienne de g en p , de la forme $(-J_\phi(x, y) \quad 1)$, possède toujours un élément inversible et il est évident que le graphe de ϕ au-dessus de O est exactement l'image réciproque de $\{0\}$ par g .

Ensuite, on pose

$$F : \begin{cases} O \times \mathbb{R} & \rightarrow & O \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, g(x, y, z)) \end{cases}$$

et on vérifie immédiatement que $F(\Gamma \cap (O \times \mathbb{R})) = F(\Gamma) = O \times \{0\} = (O \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

En outre, la jacobienne de F en un point de $O \times \mathbb{R}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ J_g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Puisque g est supposée être une submersion, a , b ou c est non nul. Quitte à permuter les applications coordonnées de F , on peut supposer que $c \neq 0$. Ainsi, $d_r F$ est inversible pour tout r dans $O \times \mathbb{R}$.

D'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme de $O \times \mathbb{R}$ sur son image. La matrice jacobienne de sa réciproque en un point p de $F(O \times \mathbb{R})$ est donnée par

$$d_p F^{-1} = (d_{F^{-1}(p)} F)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est maintenant aisé de construire une application X satisfaisant la Définition ?? : il suffit de prendre $U = O$, $V = O \times \mathbb{R}$ et de poser $X : (u, v) \mapsto F^{-1}(x, y, 0)$.

Vérifions que X est bien convenable :

- On a $X(U) = F^{-1}(O \times \{0\}) = \Gamma$ d'après la remarque précédente.
- Ensuite, X est un homéomorphisme de U dans Γ . D'une part, X est injective puisque F^{-1} l'est et, d'autre part, $\pi \circ F^{-1}$, où π représente la projection de $\mathbb{R}^3$ sur ses deux premières coordonnées, en est une réciproque bien définie et continue sur Γ .
- De même, X est lisse en tant que composée de deux applications ayant cette propriété, l'inclusion canonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et F^{-1} . Cette dernière est bien lisse car il s'agit de l'inverse d'un difféomorphisme lui-même de classe $\mathcal{C}^\infty$, en tant que composée de telles applications.
- Enfin, $d_{(u,v)} X$ est injective en tout point (u, v) de U . En effet, sa jacobienne au point $q = \pi(F^{-1}(p))$, avec $p \in F(U \times \mathbb{R})$ vaut

$$(\partial_x F^{-1} \quad \partial_y F^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}.$$

Puisque F^{-1} est un difféomorphisme, on peut en conclure que $d_q X$ est injective en tout point de $\pi(F^{-1}(U \times \mathbb{R})) = U$.

Nous venons de prouver la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) S est une surface régulière
- ii) Pour tout point p de S , il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^3$, un point q de $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert V de $(q, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$ et un difféomorphisme $F : U \rightarrow V$ tel que $F(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.
- iii) Pour tout point p de S , il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^3$ et une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $U \cap S$ soit égal à l'image réciproque de $\{0\}$ par g .
- iv) Pour tout point $p = (x_0, y_0, z_0)$ de S , il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ et une application lisse $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $U \cap S$ soit égal au graphe de ϕ tracé au-dessus de V .

Ces équivalences nous permettent de caractériser localement les surfaces régulières de trois manières différentes, en tant qu'image d'un ouvert du plan par une immersion dans $\mathbb{R}^3$, image réciproque de $\{0_{\mathbb{R}}\}$

par une submersion de $\mathbb{R}^3$ et graphe d'une fonction régulière de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ces trois caractérisations font appel, de manière différente, à des applications lisses, sur lesquelles les outils du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ s'appliquent.

Le premier d'entre eux, à savoir la notion d'application différentielle, permet ici de poursuivre l'étude des surfaces régulières.

La différentielle en x_0 d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est l'application linéaire qui réalise la meilleure approximation de $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ dans un voisinage de x_0 . Il s'agit par conséquent de l'application linéaire dont l'image est la plus "proche" de celle de $x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Dans le cas des surfaces régulières, l'image de la différentielle de X est donc le plan qui "approche" le mieux S au point p , plan que l'on voudrait donc qualifier de "tangent". Dans le cas où S est donnée au voisinage de p par $g^{-1}(\{0\})$ avec g comme dans *ii*), le noyau de $d_p g$, de dimension 2, "approche" également S au voisinage du point p . Enfin, de la même manière que dans le cas d'une application $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x , dont le graphe admet en $(x, G(x))$ une droite tangente, de pente $G'(x)$, le graphe d'une application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet un plan tangent au point $(x, \phi_1(x), \phi_2(x))$.

Voyons tout d'abord comment formaliser cette notion de plan "le plus proche de S au voisinage de p ", dont les trois caractérisations de S semblent suggérer l'idée.

Reprenons le point de vue donné par la Définition ???. L'image par $d_{(u,v)} X$ de $\mathbb{R}^2$ est en fait l'ensemble des vecteurs dérivées des applications de la forme $X \circ \gamma$, avec γ une courbe différentiable tracée sur U . Plus précisément, $d_{(u,v)} X(w) = (X \circ \gamma)'(0)$ si $\gamma'(0) = w$ et $\gamma(0) = (u, v)$. De fait, la courbe γ n'a en elle-même aucune importance, seule compte la direction dans $\mathbb{R}^2$ qu'elle prend en (u, v) et celle de $\mathbb{R}^3$ à laquelle l'application de X l'associe.

Les ensembles de courbes

$$\{X \circ \gamma \text{ différentiable} \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U, \gamma(0) = X^{-1}(p)\}$$

et

$$\{\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U) \text{ continue} \mid \alpha(0) = p\}$$

sont égaux, puisque X est un homéomorphisme de U sur $X(U)$. Autrement dit, l'ensemble des $(X \circ \gamma)'(0)$ constitue l'ensemble des directions que l'on peut prendre dans $\mathbb{R}^3$ en p tout en restant sur S . Une telle direction est appelée *vecteur tangent à S en p* et l'ensemble des vecteurs tangents est l'*espace tangent à S en p* . Formellement,

Définition 1.3 (Espace tangent). *Soit S une surface régulière et p un point de S . Un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ est dit tangent à S en p s'il existe une paramétrisation X au voisinage de p et une courbe différentiable $\gamma : U \rightarrow X(U)$ telle que $(X \circ \gamma)(0) = p$ et $(X \circ \gamma)'(0) = v$. Le plan tangent à S en p est l'ensemble des vecteurs tangents. Il est noté $T_p S$.*

Pour que $T_p S$ soit correctement défini, il reste à montrer qu'il ne dépend pas de la paramétrisation X choisie au voisinage de p .

Soient X et Y deux paramétrisations de S au voisinage de p . Soit γ une courbe paramétrée tracée sur U telle que $(X \circ \gamma)(0) = p$. On a que $(X \circ \gamma)'(0) = (Y \circ Y^{-1} \circ X \circ \gamma)'(0)$. Or $\alpha = Y^{-1} \circ X \circ \gamma$ est une courbe tracée sur V dont on vérifie immédiatement que $(Y \circ \alpha)(0) = p$. Elle est dérivable en 0 comme composée de γ , dérivable en 0 par hypothèse, et $Y^{-1} \circ X$, différentiable en $\gamma(0)$. A un vecteur tangent à S en p pour X correspond donc un vecteur tangent pour Y . Les rôles de X et Y étant symétriques dans ce qui précède, on peut en déduire que $T_p S$ ne dépend pas de la paramétrisation considérée au voisinage de p .

On a montré que $T_p S$ est exactement l'image de $\mathbb{R}^2$ par la différentielle de X , entendue comme application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. A ce titre, $T_p S$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, puisque par définition d'une surface régulière $d_{(u,v)} X$ est injective, il est de dimension 2, ce qui justifie la terminologie de "plan" tangent. Tâchons d'en trouver une base explicite.

Considérons les courbes de coordonnées dans S , c'est-à-dire les courbes le long desquelles les points de S ont tous la même première, ou deuxième, coordonnée : $X \circ \gamma_v$ et $X \circ \gamma_u$, avec $\gamma_v : t \mapsto (a, t)$ et $\gamma_u : t \mapsto (t, a)$. D'après la règle de la chaîne, $(X \circ \gamma_v)'(0) = d_{\gamma_v(0)}X(\gamma_v'(0)) = d_pX\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \partial_v X(p)$ et, de même, $(X \circ \gamma_u)'(0) = \partial_u X(p)$. On note ces deux vecteurs X_u et X_v . Par hypothèse sur X , ces deux vecteurs sont linéairement indépendant et forment donc une base de T_pS .

L'ensemble des espaces tangents à S est appelé *fibré tangent* et se note TS .

Définition 1.4 (Champ de vecteurs). *Soit S une surface régulière.*

On appelle champ de vecteurs sur S une application $V : S \rightarrow TS$ telle que $V(p)$ appartient à T_pS pour tout p .

D'après ce qu'on vient de montrer, tout champ de vecteurs peut s'écrire sous la forme $aX_u + bX_v$, avec a et b des applications de S dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.5. *Un champ de vecteurs V est dit différentiable si les applications a et b définies ci-dessus sont différentiables.*

Nous voudrions maintenant avoir une expression explicite de la décomposition des vecteurs de T_pS dans la base $\{X_u, X_v\}$. Considérons pour cela un vecteur v quelconque de T_pS . Par définition, $v = (X \circ \gamma)'(0)$ pour une certaine courbe γ tracée sur U telle que $(X \circ \gamma)(0) = p$. Cette dernière prend la forme $t \mapsto (u(t), v(t))$, avec u et v des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après la règle de la chaîne,

$$(X \circ \gamma)'(0) = d_{(u(0), v(0))}X((u'(0), v'(0))) = d_pX((u'(0), v'(0))) = u'(0)X_u + v'(0)X_v.$$

Ainsi, les coordonnées de v dans la base $\{X_u, X_v\}$ sont celles du vecteur correspondant dans la base que l'on a choisie dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, la correspondance qui à un vecteur (a, b) de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur $aX_u + bX_v$ de T_pS est une application correctement définie, linéaire, bijective, dont la matrice dans les bases précédentes est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Revenons à présent aux deux autres manières de définir une surface régulière à partir d'applications différentiables. Dans le cas où S est donnée au voisinage de p par $g^{-1}(0)$ ou par le graphe de ϕ , peut-on trouver un lien explicite entre les applications g et ϕ et T_pS , comme on l'a fait avec X ? Pour répondre à cette question, il faut revenir à la façon dont nous avons construit une paramétrisation X à partir de telles applications. On peut en considérer une en particulier puisqu'on a montré précédemment que le plan tangent ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

A partir de g , on peut définir une paramétrisation X dont la différentielle en q a pour matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\partial_x g(p)/\partial_z g(p) & -\partial_y g(p)/\partial_z g(p) \end{pmatrix},$$

où $p = (q, 0)$. L'image de cette application linéaire est engendrée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\partial_x g(p)/\partial_z g(p) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\partial_y g(p)/\partial_z g(p) \end{pmatrix}.$$

Puisque ces deux vecteurs engendrent également le noyau de $d_p g$, on peut en conclure que

$$T_pS = \text{Im}(d_q X) = \ker(d_p g),$$

ainsi que nous l'escomptions.

Dans le cas où g est construite à partir de ϕ comme on l'a fait précédemment, $\ker(d_p g)$ est engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\partial_x \phi(q) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\partial_y \phi(q) \end{pmatrix}.$$

Ce couple de vecteurs engendrent également le graphe de $d_q\phi$, qui apparaît ainsi être une nouvelle expression de T_pS , conformément à ce que nous avons annoncé.

La notion de vecteur tangent nous permet de définir une notion de longueur sur les surfaces régulières. En effet, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la longueur d'une courbe α définie sur $[a; b]$ est donnée par la formule $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$. Sur une surface régulière, les vecteurs tangent ne sont pas dans le même espace que celui sur lequel est définie la courbe qui les définit, à savoir la surface considérée, mais sur l'espace tangent. Cela nous permet de généraliser la formule précédente, puisqu'on peut facilement construire une notion de distance sur le plan tangent qui, en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en hérite un produit scalaire. On ramène donc la mesure de distances sur S à la mesure de vecteurs sur les espaces tangents.

On voudrait néanmoins pouvoir étudier S sans avoir recours à l'espace dans lequel elle est incluse et donc construire une norme pour les courbes qui ne fasse plus référence à $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on construit une forme quadratique sur chaque plan tangent en procédant comme suit :

1. On choisit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (on prendra le produit scalaire euclidien).
2. On le restreint à $T_pS \times T_pS$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ cette restriction.
3. On en tire une application à valeurs de T_pS dans $\mathbb{R}$, $I_p : \begin{cases} T_pS \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \langle v, v \rangle_p \end{cases}$.

On veut maintenant donner une formule explicite pour $I_p(v)$, avec v un vecteur de T_pS donné dans la base $\{X_u; X_v\}$. Si $v = aX_u + bX_v$, alors par définition $I_p(v) = \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle_p$. Mais puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ n'est que la restriction du produit scalaire que l'on a choisi sur $\mathbb{R}^3$, bilinéaire et symétrique, on a

$$\langle v, v \rangle_p = a^2 \langle X_u, X_u \rangle_p + 2ab \langle X_u, X_v \rangle_p + b^2 \langle X_v, X_v \rangle_p.$$

En notant $E = \langle X_u, X_u \rangle_p$, $F = \langle X_u, X_v \rangle_p$ et $G = \langle X_v, X_v \rangle_p$, on obtient

$$I_p(v) = v^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} v.$$

Cette dernière expression ne fait plus référence à $\mathbb{R}^3$ et montre en outre que I_p est une forme quadratique, dont la matrice dans la base $\{X_u, X_v\}$ est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

Remarquons qu'en réalité, I_p n'est autre que la forme quadratique induite sur $\mathbb{R}^3$ par le produit scalaire choisi, restreinte à T_pS . L'intérêt du calcul des coefficients E , F et G n'est donc "que" d'en donner l'expression dans la base induite par la paramétrisation choisie.

Définition 1.6 (Première forme fondamentale). *La forme quadratique I_p est appelée première forme fondamentale sur S en p .*

La remarque précédente prouve que I_p est définie positive, ce qui permet de finalement définir la longueur d'une courbe α tracée sur S par la formule

$$\int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

analogue à celle utilisée dans $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une courbe régulière γ est *paramétrisée par la longueur d'arc* si pour tout t de son intervalle de définition,

$$\int_0^t I_p(\gamma'(t)) dt = t.$$

On verra plus tard comment il est possible de définir une métrique sur S à partir des longueurs de courbes.

Exemple 1.3 (Surfaces de révolution). Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $\alpha :]0; l[\rightarrow \mathcal{C}$ dans le plan Oxz . Considérons la surface obtenue par révolution de $\mathcal{C}$ autour de l'axe Oz , que l'on notera S . Elle peut être paramétrée par

$$X : \begin{cases}]0; l[\times I \\ (u, v) \mapsto (\cos v \alpha_1(u), \sin v \alpha_1(u), \alpha_2(u)) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

où α_1 et α_2 sont respectivement la première et la seconde application coordonnée de α et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ de longueur inférieure ou égale à 2π . Si $\mathcal{C}$ est régulière, i.e. si α est à la fois un homéomorphisme et une immersion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et qu'elle ne croise jamais l'axe Oz , alors S est une surface régulière. En effet, X est une immersion pour les mêmes raisons que celles exposées dans le cas de la sphère, où α_1 et α_2 sont respectivement les restrictions de $\cos$ et $\sin$ à $]0; l[$.

Calculons les coefficients de la première forme fondamentale dans ce cas particulier. On a

$$X_u = (\cos v \alpha'_1(u), \sin v \alpha'_1(u), \alpha'_2(u)) \quad \text{et} \quad X_v = (-\sin v \alpha_1(u), \cos v \alpha_1(u), 0),$$

d'où

$$E = (\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2, \quad F = 0 \quad \text{et} \quad G = \alpha_1^2.$$

La norme d'un vecteur $u'X_u + v'X_v$ vaut donc $((\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2)(u')^2 + \alpha_1^2(v')^2$. Une courbe $t \mapsto X(u(t), v(t))$ tracée sur S est donc paramétrée par la longueur d'arc si et seulement si

$$((\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2)(u')^2 + \alpha_1^2(v')^2 = 1.$$

Nous étudierons plus en détail ce genre de surfaces dans la suite. A cet effet, il est utile de définir les *parallèles* et les *méridiens* comme étant les courbes de coordonnées pour, respectivement, u et v constants. De même, il sera utile de remarquer que les champs de vecteurs X_u et X_v sont orthogonaux.

L'introduction de $\langle, \rangle_p$ et de la première forme fondamentale nous permet à présent de considérer S d'un point de vue métrique. Un tel point de vue peut également être adopté sur une variété différentielle quelconque en la munissant d'une *métrique riemannienne*.

Définition 1.7 (Métrique riemannienne, variété riemannienne). Soit S une variété différentielle.

Une métrique riemannienne g sur S est un ensemble de formes bilinéaires g_p sur chacun des $T_p S$, tel que pour tous champs de vecteur V et W de S , $p \mapsto g_p(V(p), W(p))$ soit continue.

On appelle variété riemannienne une variété différentielle munie d'une métrique riemannienne.

Pour m quelconque, la restriction d'un même produit scalaire de $\mathbb{R}^m$ à chaque espace tangent définit une métrique riemannienne sur n'importe quelle sous-variété de $\mathbb{R}^m$. L'ensemble des $\langle, \rangle_p$ que nous avons construits précédemment n'est donc qu'un cas particulier de métrique riemannienne : nous le noterons $\langle, \rangle$.

1.3 Applications différentiables

Comme on l'a vu pour la première forme fondamentale, dans le cas des sous-variétés on peut construire certains outils en restreignant judicieusement ceux existant sur $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas toutefois pas possible d'appliquer la même stratégie pour définir une notion d'application différentiable sur S . En effet, une application dite "différentiable" en un point de $\mathbb{R}^n$ doit être, pour que la définition ait un sens, définie sur un voisinage dans $\mathbb{R}^n$ autour du point considéré. Or, tout voisinage suffisamment petit d'un point de S est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ne peut donc pas être ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

Cette fois-ci, nous nous servirons des paramétrisations de S pour nous ramener au cas, non pas des applications de $\mathbb{R}^3$ mais à celles de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.8 (Applications différentiables). Soient S et S' deux surfaces régulières. Soit p un point de S , X une paramétrisation de S au voisinage de p et f une application d'un voisinage de p dans S' . Soit Y une paramétrisation de S' au voisinage de $f(p)$.

On dit que f est différentiable en p si l'application $X^{-1} \circ f \circ Y$ est différentiable en $X^{-1}(p)$.

On dit qu'une application f à valeur d'un ouvert U de S dans S' est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U .

Grâce au résultat de la Proposition ??, il apparaît clairement que la notion d'application différentiable en un point p ne dépend pas de la paramétrisation considérée, malgré le fait que celle-ci apparaisse dans la définition. En effet, soit $\bar{X}$ une autre paramétrisation de S au voisinage de p et $\bar{Y}$ une autre paramétrisation de $\bar{S}$ au voisinage de $f(p)$. On a que

$$\bar{X}^{-1} \circ f \circ \bar{Y} = (\bar{X}^{-1} \circ X) \circ (X^{-1} \circ f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ \bar{Y})$$

est différentiable, en tant qu'application sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de telles applications.

De la même façon, on peut aussi généraliser la notion de difféomorphisme dont nous disposons sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.9 (Difféomorphismes, difféomorphismes locaux). Soient S et S' deux surfaces régulières et f une application de S dans S' . On dit que f est un difféomorphisme si f et f^{-1} sont différentiables sur S et S' respectivement. On dit alors que S et S' sont difféomorphes.

On dit que f est un difféomorphisme local en un point p de S s'il existe un voisinage ouvert U de p dans S et un voisinage ouvert V de $f(p)$ dans S' tels que $f : U \rightarrow V$ soit un difféomorphisme.

Tout comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, un difféomorphisme est en fait un difféomorphisme local en chacun de ses points.

Exemple 1.4. Un premier exemple de difféomorphisme est donné par les paramétrisations d'une surface régulière. Prenons une surface régulière S et une paramétrisation X de S . Puisque pour toute paramétrisation Y de S telle que $U \cap V \neq \emptyset$, $Y^{-1} \circ X$ est un difféomorphisme, on a bien que X est un difféomorphisme en tant qu'application à valeurs dans S . Ainsi, une surface régulière est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Deux surfaces difféomorphes se comportent de la même manière en tout ce qui concerne le point de vue différentiel. En fait, dans l'ensemble des surfaces régulières, la relation "être difféomorphe" est une relation d'équivalence.

En effet, il est évident que cette relation est symétrique et, par la Proposition ??, réflexive. La transitivité est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soient S_1 , S_2 et S_3 trois surfaces régulières. Soient U_1 , U_2 des ouverts respectifs de S_1 et S_2 . Soient $f_1 : U_1 \rightarrow S_2$ et $f_2 : U_2 \rightarrow S_3$ deux applications différentiables en p et $f(p)$, telles que $f_1(U_1) = U_2$. Alors $f_2 \circ f_1 : U_1 \rightarrow S_3$ est différentiable sur U_1 .

Démonstration. Soient S_1 , S_2 , S_3 , U_1 , U_2 , f_1 et f_2 comme dans l'énoncé de la proposition. Soit p un point de U_1 . Soient X_1 , X_2 et X_3 des paramétrisations de p , $f_1(p)$ et $f_2(f_1(p))$. Quitte à les restreindre, on peut supposer que chaque V_i est inclu dans U_i .

Alors, sur un voisinage assez petit de p ,

$$X_3^{-1} \circ (f_2 \circ f_1) \circ X_1 = (X_3^{-1} \circ f_2 \circ X_2) \circ (X_2^{-1} \circ f_1 \circ X_1).$$

Cette application est composée de deux applications différentiables en $X_1^{-1}(p)$ et $X_2^{-1}(f_1(p))$ et est elle-même différentiable en $X_1^{-1}(p)$, en vertu des propriétés des applications différentiables dans un espace vectoriel normé. Par définition, $f_1 \circ f_2$ est donc différentiable en p . $\square$

Maintenant que l'on dispose d'une notion de différentiabilité sur les surfaces régulières, on voudrait construire, à partir d'une application différentiable sur un certain ouvert, un équivalent à la différentielle d'une application sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas d'un espace vectoriel normé, la différentielle d'une application f a la propriété d'être l'application linéaire qui donne la meilleure approximation de f . Les surfaces régulières n'étant pas des espaces vectoriels, si l'on veut leur étendre la notion de différentielle et en conserver la linéarité, il n'est pas possible de les construire sur S . L'espace tangent, que nous avons introduit à la section précédente et qui est, lui, un espace vectoriel, permet de contourner cette difficulté.

Pour construire la différentielle d'une application $f : S \rightarrow S'$, on se sert d'un procédé similaire à celui que nous avons utilisé pour construire l'espace tangent : on considère les courbes tracées sur S et leur image dans S' .

Soit S une surface régulière, p un point de S et X une paramétrisation de S au voisinage de p . Soit f une application d'un voisinage de p dans S vers une autre surface régulière, S' . Soit Y une paramétrisation de S' au voisinage de $f(p)$.

A une courbe $\alpha = \gamma \circ X$, où γ est une courbe différentiable tracée sur U valant $X^{-1}(p)$ en 0, on avait associé le vecteur $\alpha'(0)$. Puisque α est tracée sur S , on peut considérer son image par f , qui est une courbe tracée sur S' telle que $f(\alpha(0)) = f(p)$. A cette courbe, on peut associer un vecteur de $T_{f(p)}S'$, le vecteur $(f \circ \alpha)'(0)$.

A chaque courbe α , cette correspondance associe donc un unique vecteur de $T_{f(p)}S'$. Cependant, un vecteur de T_pS peut être déterminé à partir de plusieurs courbes différentes. Ce qui permet d'affirmer que le vecteur $(Y \circ f \circ \alpha)'(0)$ est indépendant de α est la règle de la chaîne pour les applications dans $\mathbb{R}^n$, appliquée à γ et $(f \circ X)$, qui nous dit que

$$(f \circ X \circ \gamma)'(0) = d_{\gamma(0)}(f \circ X)(\gamma'(0)) = d_{X^{-1}(p)}(f \circ X)(\gamma'(0)).$$

Cela montre que la correspondance définie ci-dessus associe bien à chaque vecteur de T_pS un unique vecteur de $T_{f(p)}S'$.

Définition 1.10 (Application tangente). Soient S et S' deux surfaces régulières et p un point de S . Soit f une application différentiable définie sur un voisinage de p dans S et à valeurs dans S' .

L'application

$$T_p f : \begin{cases} T_p S \rightarrow T_{f(p)} S' \\ \alpha'(0) \mapsto (f \circ \alpha)'(0), \end{cases}$$

où α est une courbe différentiable tracée sur S , est appelée application tangente de f en p .

Il s'agit maintenant de montrer que cette application est bien linéaire, comme nous le souhaiterions.

Proposition 1.4. Soient S et S' deux surfaces régulières et p un point de S . Soit f une application différentiable définie sur un voisinage de p dans S à valeurs dans S' .

L'application tangente de f en p est linéaire.

Démonstration. Soient α et β deux courbes différentiables tracées sur S telles que $\alpha(0) = \beta(0) = p$ et soit λ un réel quelconque.

Par linéarité de la dérivée et par définition de $T_p f$,

$$T_p f(\alpha'(0) + \lambda \beta'(0)) = T_p f((\alpha + \lambda \beta)'(0)) = (f \circ (\alpha + \lambda \beta))'(0) = (f \circ \alpha)'(0) + \lambda (f \circ \beta)'(0) = T_p f(\alpha'(0)) + \lambda T_p f(\beta'(0)).$$

Il s'en suit que $T_p f$ est bien linéaire. □

Soient X et Y des paramétrisations S et S' aux voisinages respectifs de p et $f(p)$. On note $q = X^{-1}(p)$, $\phi = Y^{-1} \circ f \circ X$ l'expression de f en fonction de (u, v) et ϕ_1, ϕ_2 ses applications coordonnées.

Soit $\alpha : t \mapsto (u(t), v(t))$ une courbe tracée sur U telle que $\alpha(0) = X^{-1}(p)$. En fonction des coordonnées $(\bar{u}, \bar{v})$, $\gamma = f \circ \alpha$ s'écrit $(\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$. D'après la règle de la chaîne, dans la base $\{Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{v}}\}$,

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Puisque, $(u'(0), v'(0))$ est l'expression de $\alpha'(0)$ dans la base $\{X_u, X_v\}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

est celle de $T_p f$ dans les bases $\{X_u, X_v\}$ et $\{Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{v}}\}$.

Dans le cas où f est une paramétrisation au voisinage de p , l'image de son application tangente en $f^{-1}(p)$ n'est autre que $T_p S$. Il suffit pour s'en convaincre de revenir à la définition de $T_p S$: il s'agit exactement de l'ensemble des vecteurs de la forme $(f \circ \gamma)'(0)$ avec γ une courbe tracée sur U , ensemble que l'on vient exactement de définir comme étant l'image de $T_{f^{-1}(p)} f$.

Maintenant, qu'en est-il pour une sous-variété de dimension quelconque ? On peut définir un espace tangent exactement de la même façon, c'est-à-dire en le définissant comme l'ensemble des $(X \circ \gamma)'(0)$, où X est une paramétrisation de S au voisinage de p et γ une courbe différentiable tracée sur ce voisinage telle que $\gamma(0) = X^{-1}(p)$.

Les définitions que nous avons données pour une application différentiable sur S et son application tangente ne font pas intervenir la dimension de S et donc se généralisent immédiatement au cas d'une sous-variété de dimension quelconque.

Dans le cas plus général des variétés de dimension n , un vecteur tangent à S en p est défini comme étant une classe d'équivalence pour la relation suivante, définie sur l'ensemble des triplets (X, U, u) , avec (X^{-1}, U) une carte de S au voisinage de p et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$(X, U, u) \sim (Y, V, v) \iff d_{X^{-1}}(Y^{-1} \circ X)(u) = v.$$

Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, la symétrie et la réflexivité étant immédiates et la transitivité provenant de la définition même d'une variété, qui impose que les changements de cartes soient des difféomorphismes.

L'espace tangent à S en p est, comme précédemment, l'ensemble des vecteurs tangents.

De manière équivalente, un vecteur tangent peut être également considéré comme étant une classe d'équivalence pour la relation suivante, sur l'ensemble des courbes différentiables à valeurs dans un voisinage de $X^{-1}(p)$:

$$\gamma \sim \alpha \iff (X \circ \gamma)'(0) = (X \circ \alpha)'(0).$$

L'équivalence avec la première définition est donnée par le relation $u = (X \circ \gamma)'(0)$.

Dans le cas des sous-variétés, la deuxième définition renvoie immédiatement à celle que l'on avait donnée pour un vecteur tangent.

Avec ces notions d'applications différentiables et d'applications tangentes, on peut généraliser au cas des surfaces régulières, et des sous-variétés de manière générale, un résultat important dont on dispose dans $\mathbb{R}^n$, le théorème d'inversion locale.

Théorème 1.1 (Théorème d'inversion locale sur les surfaces régulières). *Soient S et S' des surfaces régulières, p un point de S et f une application d'un voisinage de p dans S vers S' . Si $T_p f$ est un isomorphisme, alors f est un difféomorphisme local en p .*

Démonstration. Soient X et Y des paramétrisations de S et S' aux voisinages respectifs de p et $f(p)$. Notons q l'antécédant de p par X .

Tout comme précédemment, on note $\phi = Y^{-1} \circ f \circ X$ l'expression de f en fonction de (u, v) .

On a vu que la matrice de $T_p S$ dans les bases $\{X_u, X_v\}$ et $\{Y_{\bar{u}}, Y_{\bar{v}}\}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix},$$

où ϕ_1, ϕ_2 sont les applications coordonnées de ϕ . Or, il s'agit exactement de la matrice jacobienne de ϕ en q . Puisque par hypothèse, elle est inversible, on sait par le théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$ que ϕ est un difféomorphisme local en q . Par définition d'un difféomorphisme local sur une surface régulière, f en est un en p . $\square$

2 La courbure et l'application de Gauss

2.1 Orientation des surfaces et application de Gauss

Soit S une surface régulière et p un point de S . Soit X une carte de S au voisinage de p et X_u, X_v les vecteurs de $T_p S$ obtenus en dérivant respectivement les courbes $t \mapsto X(p) + t(1, 0)$ et $t \mapsto X(p) + t(0, 1)$.

Considérant $T_p S$ comme un plan de $\mathbb{R}^3$, on peut en donner un vecteur unitaire normal, que l'on notera N . Il y a exactement deux choix possibles pour N , donnés explicitement par

$$\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \text{ et } -\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Puisque $T_p S$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie, les deux vecteurs possibles pour N non plus.

En choisissant en chaque point la même des deux expressions données ci-dessus pour définir N , on construit un champ de vecteurs différentiable sur U . Il s'agit à présent d'étendre ce champ de vecteurs sur tout S , si toutefois cela est possible. Dans le cas où S ne peut pas être recouverte par un unique voisinage de coordonnées cela n'est généralement pas le cas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.1 (Le ruban de Möbius). Considérons le ruban de Möbius. Il s'agit de la surface, régulière, paramétrée par :

$$X : (u, v) \mapsto \left((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin \frac{u}{2}, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos \frac{u}{2}, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

pour $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ et $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$.

Dans cette paramétrisation,

$$X_u = \left(\cos u (2 - v \sin \frac{u}{2}) + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \sin u, -\sin u (2 - v \sin \frac{u}{2}) + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u, -\frac{v}{2} \sin u \right)$$

et

$$X_v = \left(-\sin \frac{u}{2} \sin u, -\sin \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \right).$$

Supposons que l'on puisse construire un champ de vecteurs N différentiable sur tout le ruban.

Au point $p = X(0, 0)$, fixons $N(p)$ en, disons, $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$. Le long de la courbe $\gamma : t \mapsto (t, 0)$, le choix de N est déterminé par celui que nous avons fait en p , c'est-à-dire que

$$N(X(\gamma(t))) = \frac{X_u(\gamma(t)) \wedge X_v(\gamma(t))}{\|X_u(\gamma(t)) \wedge X_v(\gamma(t))\|}.$$

Il se trouve que $X(\gamma(0)) = p = X(\gamma(2\pi))$. Cependant, en $X(\gamma(0))$, $X_u = (2, 0, 0)$ et $X_v = (0, 0, 1)$, d'où $N(0, 0) = (0, 1, 0)$, tandis qu'en $X(\gamma(2\pi))$, $X_u = (2, 0, 0)$, $X_v = (0, 0, -1)$ et $N(2\pi, 0) = (0, -1, 0)$, ce qui entre en contradiction avec la continuité de N . Le même problème survient si l'on définit $N(p)$ comme étant $-\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$.

Il n'est donc pas possible de construire un champ différentiable de vecteurs normaux sur le ruban de Möbius.

L'existence d'un champ de vecteurs normaux différentiable sur S n'est donc pas immédiate, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 2.1 (Surfaces orientables, orientation). *On dit qu'une surface régulière S est orientable s'il existe un champ de vecteurs unitaires normaux défini et différentiable sur tout S .*

Le choix d'un tel champ de vecteurs détermine alors ce qu'on appelle une orientation de S .

A partir de maintenant, toutes les surfaces considérées seront supposées orientables.

Exemple 2.2 (La sphère). Reprenons les paramétrisations que nous avons définies sur la sphère. Une base de $T_p S$ pour chaque $p \in S$ est donnée par

$$X_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \text{ et } X_v = (-\sin v \cos u, \cos u \sin v, 0).$$

Alors,

$$\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u).$$

Il est donc possible de construire un champ différentiable de vecteurs unitaires normaux sur S , donné explicitement par $N(x, y, z) = -(x, y, z)$. La sphère S^2 est donc orientable.

Remarquons qu'un autre champ de vecteurs convient, $N(x, y, z) = (x, y, z)$. De manière générale, il existe sur les surfaces orientables exactement deux orientations possibles.

Pour les surfaces orientables, on peut définir :

Définition 2.2 (L'application de Gauss). Soit S une surface orientable munie d'une orientation N . L'application $N : S \rightarrow S^2$ est appelée l'application de Gauss de S .

A partir de cette application, il nous est possible de pousser plus loin l'étude des surfaces régulières.

2.2 "Forme" des surfaces régulières : courbure et seconde forme fondamentale

Soit S une surface régulière et p un point de S . Le plan tangent permet d'avoir une idée de la forme que prend S au voisinage de p , comme le fait la droite tangente à une courbe. Dans le cas d'une courbe γ , il est possible de préciser cette analyse en étudiant la courbure de γ , qui donne la vitesse avec laquelle la courbe s'éloigne de sa droite tangente en un point. Dans le même esprit, on voudrait définir une notion de courbure pour les surfaces.

Pour cela, considérons encore une fois les courbes tracées sur S et passant par p . Supposons qu'elles sont paramétrées par la longueur d'arc et regardons leurs courbures en p .

Contrairement à ce à quoi nous avons affaire dans la construction de $T_p S$, il faudrait cette fois tenir compte du tracé de la courbe et non pas uniquement de la direction que celle-ci prend en p . En effet, un plan de $\mathbb{R}^3$ vu comme surface régulière coïncide avec son plan tangent et devrait être de "courbure nulle", ce que l'on entend par "courbure" restant à préciser. Or, il est possible de tracer sur ce plan une courbe telle que $k(0)$ soit aussi grande que l'on veut. A l'inverse, il n'est pas possible de tracer sur la sphère S^2 une courbe qui soit de courbure nulle, la forme de la sphère l'empêchant.

Soit $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et passant par p en 0. Soit k la courbure de γ en 0. On cherche à déterminer quelle est la courbure "minimale" que doit avoir γ en p , autrement dit la proportion de $\|k\|$ induite par la seule forme de S et qui n'est pas due au tracé de γ sur S . Notons $n := \gamma''(0)$. Ce vecteur indique la direction dans laquelle γ s'éloigne de sa droite tangente en p . Les vecteurs X_u, X_v et N formant une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, n se décompose en $n_1 + n_2$, où n_1 et n_2 représentent respectivement la projection de n sur $T_p S$ et $\text{Vect}(N)$. Le théorème de Pythagore nous dit alors que $k^2 = \|n\|^2 = \|n_1\|^2 + \|n_2\|^2$ et donc :

Proposition 2.1. Soit S une surface régulière, p un point de S , $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc passant par p en 0. Notons $w := \gamma'(0)$, $n := \gamma''(0)$ et n_1, n_2 les projections de n sur $T_p S$ et $\text{Vect}(N)$. Alors $k_n := \|n_2\|$ ne dépend que de p et w et est indépendant du tracé de γ sur S . On l'appelle courbure normale de γ en p selon w .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la courbure normale ne change de signe que si on change l'orientation de S , un changement d'orientation de γ n'affectant pas le signe de k_n .

Notons $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, où X est une paramétrisation de S au voisinage de p . Alors

$$w = \gamma'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$$

et

$$kn = u''(0)X_u(0) + u'(0)X'_u(0) + v''(0)X_v(0) + v'(0)X'_v(0).$$

Les termes $u''(0)X_u(0)$ et $v''(0)X_v(0)$ appartenant à la composante de kn dans T_pS , kn_2 ne dépend que de $u'(0)X'_u(0)$ et $v'(0)X'_v(0)$ qui, l'un comme l'autre, dépendent des coordonnées de w mais pas du tracé de γ .

Il est d'autre part évident que n_2 ne dépend pas de la paramétrisation choisie, celle-ci n'intervenant nullement dans la construction de n_2 . $\square$

Ainsi, toutes les courbes tracées sur S qui prennent la même direction en un même point p ont une courbure au moins égale, en valeur absolue, à la courbure normale. Réciproquement, considérons la courbe c_n , obtenue en paramétrant par la longueur d'arc l'intersection de S avec le plan $\mathcal{N}$, normal à T_pS et contenant w . Alors $c'_n(0) \in T_pS \cap \mathcal{N}$ et donc ne peut être que colinéaire à w . De plus, c_n étant tracée sur un plan, son vecteur normal est parallèle à ce plan. Puisque c_n est paramétrée par la longueur d'arc, n est également perpendiculaire à w , ce qui ne laisse à n pas d'autre possibilité que d'être parallèle à N . La courbure de c_n en p est donc égale à sa courbure normale.

De tout cela, il vient que la courbure normale constitue bien la valeur minimale de $k(p)$, valeur intrinsèquement liée à la forme que prend S au voisinage de p . C'est donc à partir de cette courbure normale que l'on définit une notion de courbure sur S .

Définition 2.3 (Seconde forme fondamentale). *L'application*

$$II_p : \begin{cases} T_pS & \rightarrow & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & k_n(w) \end{cases},$$

où $k_n(w)$ représente la courbure normale à S en p , est appelée seconde forme fondamentale sur S .

Une autre façon d'aborder cette seconde forme fondamentale est de la considérer non plus à partir des courbes tracées sur S mais du point de vue des plans tangents à S . En effet, on a dit à propos des courbes que la courbure représente la vitesse avec laquelle une courbe s'éloigne de sa droite tangente en un point. Si l'on veut considérer la courbure d'une surface d'une manière analogue, il faut trouver un moyen d'estimer la vitesse avec laquelle S s'éloigne de son plan tangent. Pour cela, il est plus commode de considérer les vecteurs normaux qui, une fois une orientation fixée sur S , dépendent entièrement des plans tangents. S'agissant d'un champ de vecteur dans $\mathbb{R}^3$, il est aisé d'en étudier les variations, il suffit pour cela de considérer la différentielle de l'application de Gauss.

2.3 Différentielle de l'application de Gauss

L'application de Gauss est à valeur de S dans S^2 , toutes deux régulières, son application tangente en un point p est bien définie et doit être à valeurs de T_pS dans $T_{N(p)}S^2$.

Toutefois, T_pS et $T_{N(p)}S^2$ sont tous deux des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ normaux à $N(p)$. en effet, $N(p)$ est par définition normal à T_pS et on a vu que T_qS^2 est normal à q . Ainsi, T_pS et $T_{N(p)}S^2$ sont parallèles, ce qui nous autorise à considérer d_pN comme un endomorphisme de T_pS .

Proposition 2.2. *L'application $v \mapsto -\langle d_pN(v), v \rangle$ est égale à la seconde forme fondamentale en p .*

Démonstration. Soit v un vecteur de T_pS . Par définition, il existe une courbe lisse γ tracée sur S telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $n := \gamma''(0)$ et k la courbure à γ en 0. On note $t \mapsto N(t)$ l'application qui à t associe $N(\gamma(t))$. D'après la définition qu'on en a donné,

$$II_p(v) = k_n(v) = k \langle N(0), n \rangle = \langle N(0), n \rangle = \langle N(0), \gamma''(0) \rangle.$$

Or, il se trouve que $(\langle N, \gamma' \rangle)' = \langle N', \gamma' \rangle + \langle N, \gamma'' \rangle$ est identiquement nulle puisque N et γ' sont deux champs de vecteur orthogonaux. Ainsi,

$$II_p(v) = -\langle N'(0), v \rangle = -\langle (N \circ \gamma)'(0), v \rangle = -\langle d_pN(v), v \rangle.$$

$\square$

Proposition 2.3. *L'endomorphisme $d_p N$ est auto-adjoint.*

Démonstration. Puisque les vecteurs X_u et X_v forment une base de $T_p S$, il suffit de vérifier que

$$\langle d_p N(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, d_p N(X_v) \rangle.$$

Soit $\gamma : t \mapsto X(u(t), v(t))$ une courbe passant par p en 0. D'un côté,

$$d_p N(\gamma'(0)) = N_u u'(0) + N_v v'(0).$$

D'un autre côté, par linéarité,

$$d_p N(\gamma'(0)) = d_p N(u'(0)X_u + v'(0)X_v) = u'(0)d_p N(X_u) + v'(0)d_p N(X_v).$$

Il s'en suit que $N_u = d_p N(X_u)$ et $N_v = d_p N(X_v)$. En dérivant $\langle N, X_u \rangle = 0$ par rapport à v et $\langle N, X_v \rangle = 0$ par rapport à u puis en appliquant le lemme de Schwartz à X_{uv} , on obtient bien

$$\langle N_v, X_u \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_u, X_{uv} \rangle.$$

□

Ainsi, la seconde forme fondamentale est une forme quadratique sur $T_p S$.

Définition 2.4 (Courbure gaussienne). *Le déterminant de $d_p N$ est appelé la courbure gaussienne de S en p et est noté K .*

D'après ce que l'on sait sur les formes quadratiques, $d_p N$ possède deux valeurs propres (pas nécessairement distinctes) qui sont le maximum et le minimum de II_p sur $T_p S$.

Ainsi, si K est positif, les deux valeurs propres sont de même signe et II_p ne change pas de signe sur $T_p S$. A l'inverse, si K est négative, le signe de II_p n'est pas constant sur $T_p S$. Enfin, si K est nulle, il y a au moins une direction dans $T_p S$ pour laquelle la courbure est nulle.

A présent, tout comme nous l'avons fait pour la première, nous voudrions exprimer la seconde forme fondamentale en fonction des coordonnées locales, sans faire référence à $\mathbb{R}^3$.

Puisque N est un champ de vecteurs unitaires, N_u et N_v sont normaux à N et par conséquent appartiennent à $T_p S$. Aussi

$$\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix},$$

où $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ est la jacobienne de N en p dans la base $\{X_u, X_v\}$. Alors :

$$\begin{aligned} II_p(u, v) &= - \langle N_u, X_u \rangle u^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) uv - \langle N_v, X_v \rangle v^2 \\ &= \langle N, X_{uu} \rangle u^2 + 2 \langle N, X_{uv} \rangle uv + \langle N, X_{vv} \rangle v^2 \\ &= - \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle u^2 - (\langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle + \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle) uv \\ &\quad - \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle v^2 \\ &= - (a_{11}E + a_{21}F) - ((a_{11}F + a_{21}G) + (a_{12}E + a_{22}F)) - (a_{12}F + a_{22}G). \end{aligned}$$

On pose $e := \langle N, X_{uu} \rangle$, $f := \langle N, X_{uv} \rangle$ et $g := \langle N, X_{vv} \rangle$ et on a :

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^t = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

et :

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \text{ et } a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (1)$$

Nous venons d'introduire l'une des notions les plus importante dans l'étude des surfaces régulières : la courbure. Dans la partie suivante, il sera question d'une autre notion, tout aussi centrale : les géodésiques.

3 Les géodésiques et l'application exponentielle

3.1 Distance intrinsèque

Soient p_1 et p_2 deux points de S .

Notons Γ_{p_1, p_2} l'ensemble des courbes $\gamma : [0; 1] \rightarrow S$ continues, dérivables par morceaux et telles que $\gamma(0) = p_1$ et $\gamma(1) = p_2$. Notons également $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = 1$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, les points où γ n'est pas différentiable. Grâce à la première forme fondamentale, il est possible de définir la longueur de chaque élément de Γ_{p_1, p_2} :

$$l(\gamma) = \sum_1^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

.

Proposition 3.1. *Soit S une surface régulière connexe. Soient p_1 et p_2 deux points de S .*

L'ensemble Γ_{p_1, p_2} n'est pas vide.

Démonstration. Soit $p_0 \in S$. Considérons $A := \{p \in S \mid \exists \gamma \in \Gamma_{p_0, p}\}$. C'est un ensemble non-vide puisqu'il contient au moins le point p_0 . Montrons qu'il est ouvert.

Soit en effet $p \in A$. Soient $X : U \rightarrow S$ une paramétrisation de S au voisinage de p et q l'image réciproque de p par X . Par définition, U est ouvert, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(q, \epsilon) \subset U$. Alors $X(\mathcal{B}(q, \epsilon))$ est un voisinage ouvert de p dans S . Pour un point p' de ce voisinage, on pose

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ X(\alpha(2t-1)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases},$$

où $\alpha : [0; 1] \rightarrow \mathcal{B}(q, \epsilon)$ paramètre le segment $[q, X^{-1}(p')]$ et γ est une courbe continue et dérivable par morceaux reliant p_0 et p (dont l'existence est garantie par l'hypothèse faite sur p). La courbe $\tilde{\gamma}$ remplit les conditions nécessaires pour prouver l'appartenance de p' à A .

Montrons que A est fermé. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points de A . On note $\bar{p}$ la limite de cette suite. Soit (X, U) un voisinage de coordonnées de $\bar{p}$ et q son image réciproque par X . Comme précédemment, puisque U est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathcal{B}(q, \eta) \subset U$. Par continuité de X^{-1} , il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(\bar{p}, \epsilon) \subset X(\mathcal{B}(q, \eta))$. Puisque par hypothèse (p_n) converge vers $\bar{p}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p_N \in \mathcal{B}(\bar{p}, \epsilon)$. Alors la même courbe que celle construite précédemment pour $p = p_N$ et $p' = \bar{p}$ relie p_0 à $\bar{p}$, tout en satisfaisant les conditions de continuité et de dérivabilité par morceaux. Ainsi, $\bar{p}$ est dans A .

Finalement, la connexité de S implique bien que $A = S$. □

La longueur d'une courbe étant toujours positive, nous pouvons définir :

$$\forall p_1, p_2 \in S, \quad \text{dist}(p_1, p_2) := \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1, p_2}} l(\gamma)$$

.

On souhaiterait pouvoir montrer que dist est une distance sur S , que l'on appellera *distance intrinsèque* parce que sa définition ne fait pas mention de $\mathbb{R}^3$.

La positivité est évidente d'après la définition de $l(\gamma)$. L'inégalité triangulaire également, dès que l'on a remarqué que, pour p_1, p_2 et p_3 dans S , deux courbes de Γ_{p_1, p_2} et Γ_{p_2, p_3} forment une courbe de Γ_{p_1, p_3} et donc que la somme de leur longueur ne peut être que supérieure à $\text{dist}(p_1, p_3)$.

Il est toutefois beaucoup moins aisé de prouver que dist est définie. En effet, aucune condition d'injectivité n'est exigée sur les éléments de Γ_{p_1, p_2} et il n'est même pas certain que l'infimum de $\{l(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_{p_1, p_2}\}$ soit atteint. En fait, cela est bien le cas et il est même possible de caractériser les courbes qui réalisent ces minima.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire préalablement la notion de dérivée covariante.

3.2 Dérivée covariante

Définition 3.1 (Dérivée covariante). Soit S une surface régulière et V un champ de vecteurs le long d'une courbe γ tracée sur S . La correspondance

$$\frac{DV}{dt} : p \mapsto (\pi_p \circ \frac{dV}{dt})(p),$$

où π_p est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $T_p S$, définit un champ de vecteurs le long de γ , appelé dérivée covariante de V .

Voyons comment exprimer, dans un voisinage de coordonnée donné, la dérivée covariante d'un champ de vecteurs $V = aX_u + bX_v$ le long d'une courbe γ , où a et b sont des applications différentiables à valeur dans $\mathbb{R}$ et X la paramétrisation correspondant au voisinage considéré.

Lemme 3.1. Soit S une surface régulière, $f : (-\epsilon; \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et V un champ de vecteurs différentiable, défini le long d'une courbe γ tracée sur S . Alors,

$$\frac{DfV}{dt}(t) = f(t) \frac{DV}{dt}(t) + \frac{df}{dt}(t)V(t).$$

Démonstration. Par définition de la dérivée covariante, $\frac{DfV}{dt} = \pi(\frac{dfV}{dt})$. En appliquant la règle de Leibnitz dans $\mathbb{R}^3$ à fV , on obtient l'égalité avec $\pi(\frac{df}{dt}V + f\frac{dV}{dt})$ puis, par linéarité de π , avec $\frac{df}{dt}\pi(V) + f\pi(\frac{dV}{dt})$, qui n'est autre que $\frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ puisque V est un champ de vecteurs sur S . $\square$

Notons $V = aX_u + bX_v$, où a et b sont des applications différentiables à valeur réelles, et $\gamma = X \circ \tilde{\gamma}$, avec $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))$. D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{da}{dt}X_u + a\frac{dX_u}{dt} + \frac{db}{dt}X_v + b\frac{dX_v}{dt} \\ &= \frac{da}{dt}X_u + a\left(\frac{d\gamma_1}{dt}X_{uu} + \frac{d\gamma_2}{dt}X_{uv}\right) + \frac{db}{dt}X_v + b\left(\frac{d\gamma_1}{dt}X_{vu} + \frac{d\gamma_2}{dt}X_{vv}\right). \end{aligned}$$

Dans la base $\{X_u; X_v; N\}$,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \lambda_1 N \\ X_{uv} &= X_{vu} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \lambda_2 N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \lambda_3 N \end{aligned}$$

pour Γ_{ij}^k et λ_l des scalaires dépendants de X et de (u, v) .

Nous avons finalement :

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \left[\frac{da}{dt} + a(\Gamma_{11}^1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{d\gamma_2}{dt}) + b(\Gamma_{12}^2 \frac{d\gamma_1}{dt} + \Gamma_{22}^2 \frac{d\gamma_2}{dt}) \right] X_u \\ &\quad + \left[\frac{db}{dt} + a(\Gamma_{11}^2 \frac{d\gamma_1}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{d\gamma_2}{dt}) + b(\Gamma_{12}^1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{d\gamma_2}{dt}) \right] X_v. \end{aligned}$$

Les Γ_{ij}^k sont appelés *symboles de Christoffel*. En appliquant, de part et d'autre de chaque égalité, le produit scalaire avec X_u et X_v , et en remarquant que les $\langle X_l, X_{mn} \rangle$ sont fonctions de E_u, E_v, F_u, F_v, G_u et G_v , on obtient trois systèmes linéaires de déterminant $EG - F^2 \neq 0$. Les symboles de Christoffel s'expriment donc en termes de E, F, G et de leurs dérivées.

Ainsi, $\frac{DV}{dt}(t)$ ne dépend pas de la courbe γ mais uniquement de son vecteur dérivé en t .

Pour faciliter de futurs calculs, il est utile de montrer que :

Lemme 3.2.

$$\begin{cases} (\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 & = -FK \\ (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 & = EK. \end{cases}$$

Démonstration. Considérons l'expression $(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0$. D'après les calculs précédents, le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + e N_v - (\Gamma_{12}^1)_u X_u - \Gamma_{12}^1 X_{uu} - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 X_{vu} - f_u N - f N_u \\ & = ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - f a_{11}) X_u \\ & \quad + ((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - f a_{21}) X_v \\ & \quad + (\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v - f_u - \Gamma_{12}^1 e - \Gamma_{12}^2 f) N. \end{aligned}$$

Puisque X_u , X_v et N forment une famille libre, les coefficients de la combinaison linéaire précédente sont tous nuls. En considérant le coefficient devant X_u , on obtient

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - f a_{11} = 0.$$

En remplaçant les a_{ij} par leur expression en fonction de e, f, g, E, F et G calculés en (??), cette équation devient

$$(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = f \frac{fF - eG}{EG - F^2} - e \frac{gF - fG}{EG - F^2} = -FK.$$

La seconde égalité se démontre de manière tout-à-fait similaire, à partir du coefficient de X_v :

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = f a_{21} - e a_{22} = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} = EK.$$

□

Voici maintenant quelques résultats, utiles pour de futurs calculs.

Soit S une surface régulière, V et W deux champs de vecteurs différentiables, définis le long d'une courbe γ tracée sur S , et $h : (-\epsilon; \epsilon) \times (-\eta; \eta) \rightarrow S$ une application différentiable. Alors :

Lemme 3.3. $\frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle = \langle \frac{dV}{dt}(t), W(t) \rangle + \langle V(t), \frac{dW}{dt}(t) \rangle$.

Démonstration. Puisque, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ et tout $w \in T_p S$, $\langle v, w \rangle = \langle pr(v), w \rangle$, avec pr la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur $T_p S$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V(t), W(t) \rangle &= \langle \frac{dV}{dt}(t), W(t) \rangle + \langle V(t), \frac{dW}{dt}(t) \rangle \\ &= \langle pr(\frac{dV}{dt}(t)), W(t) \rangle + \langle V(t), pr(\frac{dW}{dt}(t)) \rangle \\ &= \langle \frac{dV}{dt}(t), W(t) \rangle + \langle V(t), \frac{dW}{dt}(t) \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. $\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}$.

Démonstration. Puisque h est différentiable, elle est de la forme $(s, t) \rightarrow X(h_1(s, t), h_2(s, t))$, avec h_1 et h_2 deux applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dans la base $\{X_u, X_v\}$, les dérivées partielles de h s'écrivent

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial t} X_v \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} X_v.$$

D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial h_1}{\partial t} X_u + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} X_v \\ &+ \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} \Gamma_{11}^1 + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \Gamma_{12}^1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} \Gamma_{12}^1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \Gamma_{22}^1 \right) X_u \\ &+ \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s} \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial s} \Gamma_{22}^2 \right) X_v. \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial h_i}{\partial t} \frac{\partial h_j}{\partial s} = \frac{\partial h_j}{\partial s} \frac{\partial h_i}{\partial t}$ et, d'après le lemme de Schwartz, $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial s}$.

En développant de la même manière $\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}$, on obtient donc bien l'égalité désirée. $\square$

3.3 Géodésiques

Il est maintenant possible de définir les courbes dont la longueur d'arc pourrait réaliser l'infimum de la définition de *dist*. Intuitivement, pour qu'une courbe sur S entre deux points p et q ait une chance de réaliser ce minimum, il faut qu'elle emprunte le chemin le plus proche de la ligne droite entre p et q dans $\mathbb{R}^3$, le "détour" qu'elle doit nécessairement emprunter pour rester sur S doit donc être le plus petit possible. Sa courbure devrait donc en tout point être la plus petite possible. Mais puisque la courbure en un point est au moins la courbure normale en ce même point, cela revient à dire que le vecteur normal à cette courbe est parallèle à N et donc que le vecteur tangent ne subit pas de variation du point de vue de la surface. Cette description correspond exactement à celle d'une courbe dont le champ de vecteurs tangent serait de dérivée covariante nulle.

Définition 3.2 (Géodésiques). *Soit S une surface régulière.*

On dit qu'une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow S$ est une géodésique si $\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$.

Voyons si de telles courbes peuvent être mises en équation.

Soit $\gamma : I \rightarrow S$ une courbe paramétrée. Notons γ_1 et γ_2 les applications satisfaisant : $\gamma(t) = X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour tout $t \in I$. Alors $\gamma' = \gamma_1' X_u + \gamma_2' X_v$. D'après ce qui précède, γ est une géodésique si et seulement si γ_1 et γ_2 satisfont :

$$\begin{cases} \gamma_1'' + \Gamma_{11}^1 (\gamma_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 \gamma_1' \gamma_2' + \Gamma_{22}^1 (\gamma_2')^2 &= 0 \\ \gamma_2'' + \Gamma_{11}^2 (\gamma_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 \gamma_1' \gamma_2' + \Gamma_{22}^2 (\gamma_2')^2 &= 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ce système peut être réécrit sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre, $\eta'(t) = F(t, \eta)$, en posant $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (\gamma_1', \gamma_2')$ et

$$F(t, \eta) = -((\Gamma_{11}^1 (\eta_1)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \eta_1 \eta_2 + \Gamma_{22}^1 (\eta_2)^2), -(\Gamma_{11}^2 \eta_1)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \eta_1 \eta_2 + \Gamma_{22}^2 (\eta_2)^2))(t).$$

De cela, on peut tirer :

Proposition 3.2. *Soit S une surface régulière. Soient p un point de S et v un vecteur de $T_p S$.*

Il existe une unique géodésique $\gamma : [-\epsilon; \epsilon] \rightarrow S$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz, appliqué au système ??, avec comme conditions initiales

$$\begin{cases} \gamma(0) &= p \\ \gamma'(0) &= v. \end{cases}$$

$\square$

Il est même possible de prouver un résultat plus général, prenant en compte la dépendance aux conditions initiales :

Proposition 3.3. *Il existe $\epsilon > 0$, un voisinage V de p dans S , un voisinage W de 0 dans $T_p S$ et une application différentiable $f : (-\epsilon, \epsilon) \times V \times W \rightarrow S$ tels que pour tous $(p, v) \in V \times W$, la courbe $t \rightarrow f(t, p, v)$ soit la géodésique passant par p en 0 avec direction v .*

Démonstration. Comme précédemment, il ne s'agit que de la reformulation d'un résultat sur $\mathbb{R}^n$, appliqué à ??, qui nous assure qu'à une application différentiable $F : I \subset \mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des conditions initiales $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times U$ donnés, il existe un voisinage ouvert $J \subset I$ de t_0 , un voisinage ouvert $V \subset U$ de p_0 et une application différentiable $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $t \mapsto f(t, p)$ soit la solution au problème $g'(t) = F(t, g)$ avec conditions initiales $g(t_0) = p$. $\square$

Exemple 3.1 (Surfaces de révolution – suite). Considérons à nouveau le cas des surfaces de révolution. Voyons à quelles conditions méridiens et parallèles peuvent prétendre être des géodésiques. Soit γ une paramétrisation d'un méridien $\mathcal{M}$ de la surface considérée. Puisque γ_2 est constante, le système ?? devient

$$\begin{cases} \gamma_1'' + \Gamma_{11}^1 (\gamma_1')^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 (\gamma_1')^2 = 0. \end{cases}$$

Ici, puisque les champs de vecteurs X_u et X_v sont orthogonaux, les symboles de Christoffel se calculent facilement à partir des dérivées secondes de X ,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (\cos v \alpha_1'(u)) & , \sin v \alpha_1'(u), \alpha_2'(u) \\ X_{uv} &= (-\sin v \alpha_1'(u)) & , \cos v \alpha_1'(u), 0 \\ X_{vv} &= (-\cos v \alpha_1(u)) & , -\sin v \alpha_1(u), 0. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\langle X_u, X_{uu} \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{\alpha_1' \alpha_1'' + \alpha_2' \alpha_2''}{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\langle X_v, X_{uu} \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = 0. \end{aligned}$$

Pour que le système ?? soit vérifié, il faut et il suffit que

$$\gamma_1''((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2) + (\alpha_1' \alpha_1'' + \alpha_2' \alpha_2'')(\gamma_1')^2 = 0.$$

Cette égalité est vraie si γ paramètre $\mathcal{M}$ par la longueur d'arc. En effet, d'après l'exemple ??, on aurait $((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)(\gamma_1')^2 = 1$. L'égalité désirée s'obtient en dérivant la précédente. Ainsi, puisque toute courbe régulière peut être paramétrée par la longueur d'arc, tous les méridiens d'une surface de rotation régulière sont des géodésiques.

Voyons à présent ce qu'il en est d'un parallèle $\mathcal{P}$ quelconque de S . Dans le cas où γ_1 est constante, le système ?? devient :

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 (\gamma_2')^2 & = 0 \\ \gamma_2'' + \Gamma_{22}^2 (\gamma_2')^2 & = 0. \end{cases}$$

Le même calcul que précédemment donne l'expression des symboles de Christoffel en fonction de α :

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\alpha_1 \alpha_1'}{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

La seconde équation implique donc que γ_2'' soit identiquement nulle, ce qui ne fait que fixer la paramétrisation. La première équation impose en revanche que γ_2' , α_1 ou α_1' soit nulle, le premier cas n'étant pas envisageable puisque $\mathcal{P}$ serait alors réduite à un point. Si α_1 s'annulait, alors la courbe $\mathcal{C}$ intersecterait l'axe Oz , ce qu'on a supposé faux. Les seuls parallèles qui soient des géodésiques sont donc ceux qui intersectent $\mathcal{C}$ en un point où son vecteur dérivé est parallèle à Oz .

3.4 Surfaces complètes et application exponentielle

Les géodésiques dont l'existence est assurée par les théorèmes précédents sont bien définies sur un intervalle $(-\epsilon; \epsilon)$ centré en 0 mais rien ne dit qu'elles peuvent être étendues sur tout $\mathbb{R}$. Il s'agit en fait d'une propriété que ne possèdent pas toutes les surfaces régulières.

Définition 3.3 (Surface complète). *Une surface régulière S est dite complète si toutes ses géodésiques sont définies sur $\mathbb{R}$.*

Nous avons toutefois le résultat suivant :

Lemme 3.5. *Notons $\gamma_{p,v}$ la géodésique ayant pour direction v en p . Si $\gamma_{p,v}$ est définie sur $(-\epsilon; \epsilon)$, alors $\gamma_{p,\lambda v}$, pour un réel positif λ , est définie sur $(-\frac{\epsilon}{\lambda}; \frac{\epsilon}{\lambda})$ et*

$$\gamma_{p,v}(\lambda t) = \gamma_{p,\lambda v}(t).$$

Démonstration. Par définition, $\gamma_{p,v}$ est solution du système ?? avec conditions initiales

$$\begin{cases} \gamma(0) &= p \\ \gamma'(0) &= v. \end{cases}$$

Notons h_λ l'application $t \rightarrow \lambda t$. Il se trouve que $(\gamma_{p,v} \circ h_\lambda)' = \lambda \gamma'_{p,v}$ et $(\gamma_{p,v} \circ h_\lambda)'' = \lambda^2 \gamma''_{p,v}$, d'où $\gamma_{p,v} \circ h_\lambda$ est solution du système (??).

En outre, $(\gamma_{p,v} \circ h_\lambda)(0) = \gamma_{p,v}(\lambda 0) = p$ et $(\gamma_{p,v} \circ h_\lambda)'(0) = \lambda \gamma'_{p,v}(0) = \lambda v$. De fait, $\gamma_{p,v}$ est solution du même problème de Cauchy que $\gamma_{p,\lambda v}$ et donc, par unicité de la solution, coïncide avec cette dernière à l'intersection de leurs intervalles de définition.

Enfin, si $\gamma_{p,v}$ est définie sur $(-\epsilon; \epsilon)$, alors $\gamma_{p,\lambda v} = \gamma_{p,v} \circ h_\lambda$ est définie sur $(-\frac{\epsilon}{\lambda}; \frac{\epsilon}{\lambda})$. □

Ce lemme nous dit qu'il suffit de changer la vitesse d'une géodésique en 0 pour en changer l'intervalle de définition.

Au paragraphe précédent, on a montré qu'à un vecteur v de $T_p S$ donné, on peut associer une unique géodésique partant de p ayant v pour vecteur de vitesse en 0. A partir de ce résultat, on construit une application de $T_p S$ vers S de la façon suivante :

Définition 3.4 (Application exponentielle). *Soit S une surface régulière et p un point de S .*

L'application $exp_p : \begin{cases} T_p S \rightarrow S \\ v \mapsto \gamma_{p,v}(1) \end{cases}$ est appelée application exponentielle en p .

Proposition 3.4. *L'application exponentielle est bien définie dans un voisinage de l'origine de $T_p S$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage V de $(p, 0)$ dans $S \times T_p S$ tel que le problème ??, assorti aux conditions initiales $\gamma(0) = p'$, $\gamma'(0) = v$ pour $(p', v) \in V$, ait une solution définie sur $(-\epsilon, \epsilon)$.

Soit $\delta > 0$ tel que $\{p\} \times \mathcal{B}(0, \delta) \in V$. D'après le lemme précédent, les géodésiques d'origine p et de direction $v \in \mathcal{B}(0, \frac{\delta\epsilon}{2})$ sont toutes définies sur $(-2; 2)$, ce qui implique que exp_p est bien définie sur $\mathcal{B}(0, \frac{\delta\epsilon}{2})$. □

En prenant la suite de l'approche imagée d'une géodésique évoquée plus haut, on peut voir l'application exponentielle comme étant l'application qui consiste à enrouler le plan tangent en p autour de S . Ce plan étant celui qui s'approche le plus de la forme de S autour de p et cette dernière étant lisse, on peut espérer que exp_p soit au moins bijective dans un petit voisinage autour de 0.

Cela est bien le cas, puisque par définition,

$$d_0 exp_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_{p,tv}(1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_{p,v}(t) = v.$$

La différentielle en 0 de l'application exponentielle en p est en fait l'identité. Elle est donc inversible, ce qui implique, par le théorème d'inversion locale, que exp_p est un difféomorphisme au voisinage de 0.

3.5 Le théorème de Hopf-Rinow

Nous possédons désormais tous les outils nécessaires pour montrer que l'application $dist$ introduite en début de section est bien une distance. Il restait à prouver l'équivalence

$$dist(p, q) = 0 \iff p = q.$$

Pour cela, supposons qu'à l'inverse il existe deux points distincts de S , que nous noterons p et q , tels que $dist(p, q) = 0$. La surface S étant, dans un certain voisinage de p , homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$, séparé, il existe un voisinage V de p qui ne contient pas q . D'après la remarque précédente et le théorème d'inversion locale, il existe aussi un voisinage V' de p tel que $exp_p : exp_p^{-1}(V') \rightarrow V'$ est une bijection.

Notons $\mathcal{B}(\delta) := \{v \in T_p S \mid \|v\| = \delta\}$ et $\mathcal{B}(p, \delta) := exp_p(\mathcal{B}(\delta))$. L'ensemble $\mathcal{B}(\delta)$ forme une courbe fermée de $T_p S$, dont l'intérieur contient 0. Son image par l'application exponentielle, continue, est donc également une courbe fermée, ayant $exp_p(0)$ dans son intérieur.

Soit $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(p, r) \subset V \cap V'$.

Par définition de l'infimum et dans la mesure où ici $dist(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} \{l(\gamma)\} = 0$, il existe une courbe $\alpha : [0; 1] \rightarrow S$, différentiable par morceaux, reliant p à q , de longueur d'arc inférieure à $\frac{r}{2}$. Puisque $\alpha([0; 1])$ est connexe et que q n'est pas dans l'intérieur de $\mathcal{B}(p, \delta)$, il existe au moins un point de la courbe qui appartienne à $\mathcal{B}(p, r)$. Mais alors la longueur de α doit être au moins r , ce qui entre en contradiction avec la définition de α .

Il s'en suit qu'une telle paire de points (p, q) n'existe pas sur S , ce qui suffit à prouver l'équivalence désirée.

La surface S assortie de l'application $dist$ possède donc une structure d'espace métrique. En fait, la topologie qui en découle est la même que celle induite par la restriction de la métrique usuelle d de $\mathbb{R}^3$ à S .

En effet, la distance usuelle entre deux points $p, q \in \mathbb{R}^3$ est en fait la longueur du segment $[p; q]$. Or, celui-ci est une courbe continue et différentiable qui joint p à q . Il est donc clair d'après la définition de $dist$ que $d(p, q) \leq dist(p, q)$, ce qui implique qu'une boule pour $dist$ est incluse dans la boule pour d de même centre et de même rayon. Ainsi, les ouverts de (S, d) sont aussi des ouverts de $(S, dist)$.

Inversement, considérons une boule B de $(S, dist)$ de centre p et de rayon r . D'après la définition de exp_p , l'image B' par exp_p de la boule de $T_p S$ centrée en 0 et de même rayon est incluse dans B . quitte à restreindre r , on peut supposer que cette dernière est comprise dans un voisinage de p sur lequel exp_p est un difféomorphisme. Alors B' est ouvert en p dans (S, d) , c'est-à-dire qu'il existe une boule $\bar{B}$ de centre p et de rayon $\bar{r}$ dans $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection avec S est incluse dans B' . Ainsi, il existe une boule pour d incluse dans B . Les ouverts de $(S, dist)$ sont donc aussi des ouverts de (S, d) .

Les ouverts de S étant les mêmes suivant que l'on considère d ou $dist$, ces deux distances définissent la même topologie sur S . Dans ce qui va suivre, on considérera S comme un espace métrique muni de la distance intrinsèque.

Sa définition n'est toutefois pas très commode à utiliser en pratique, ne serait-ce qu'en raison de l'infimum, dont nous ne savons même pas s'il est atteint. En fait, il nous est possible de montrer que cela est bien toujours le cas, et même que la courbe réalisant le minimum doit obligatoirement être une géodésique.

Nous nous placerons dans un système de coordonnées particulier, défini à partir de l'application exponentielle en p , celle-ci étant un difféomorphisme au voisinage de p . Dans un système de coordonnées polaires sur $T_p S$, chaque point de $T_p S$ privé d'une demi-droite l peut être caractérisé par une unique paire $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times (0; 2\pi)$. Il en est donc de même pour les points de V privé de $exp_p(l) := L$. Ce système de coordonnées est appelé *coordonnées polaires* au voisinage de p . La courbe image par exp_p de $t \mapsto (t, \theta_0)$ est appelée *géodésique radiale* d'angle θ_0 et l'image de $t \mapsto (r, t)$ *cercle géodésique de rayon r* . Ce sont les courbes de coordonnées de ce nouveau système de coordonnées.

Proposition 3.5. *Soit $p \in S$.*

Il existe un voisinage V de p dans S tel que si $\gamma : [s_0; s_1] \rightarrow V$ est une géodésique vérifiant $\gamma(s_0) = p$, alors pour toute courbe $\alpha : [s_0; s_1] \rightarrow S$ joignant p et $q := \gamma(s_1)$, $l(\gamma) \leq l(\alpha)$.

De plus, si $l(\gamma) = l(\alpha)$, alors les traces des deux courbes coïncident.

Démonstration. Soit V un voisinage normal de p et W la région bordée par un cercle géodésique contenue dans V . Soit q un point de W et L la géodésique radiale passant par q . Paramétrons $V - L$ avec les coordonnées polaires (r, θ) .

Soit $\alpha : t \mapsto (r(t), \theta(t))$ une courbe reliant $p := \alpha(s_0)$ à $q = \alpha(s_1)$. Supposons dans un premier temps que sa trace est contenue dans $V - L$. Sa longueur d'arc entre ϵ et $s_1 - \epsilon$ est donnée par

$$l(\alpha)(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{s_1 - \epsilon} \sqrt{(r'(t))^2 + (\theta'(t))^2} dt.$$

Elle est donc toujours supérieure ou égale à celle de γ sur le même intervalle, puisque celle-ci vaut

$$l(\gamma)(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{s_1 - \epsilon} \sqrt{(r'(t))^2} dt = l(\gamma) - 2\epsilon.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on trouve bien que $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. En outre, il y a égalité si et seulement si $\theta' \equiv 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = \gamma$.

Supposons maintenant que la trace de α soit contenue dans V mais croise L . Puisque L et $\alpha([s_0; s_1])$ sont compactes, cela arrive soit en un nombre fini de points a_i , soit il existe une portion de $[s_0; s_1]$ sur laquelle la trace de α coïncide avec celle de γ et sur le complémentaire de laquelle elles s'intersectent en un nombre fini de points. Sur chaque intervalle $[a_i; a_{i+1}]$, on peut appliquer le raisonnement précédent, ce qui nous fait arriver à la conclusion que la longueur d'arc totale de α est effectivement supérieure ou égale à celle de γ , l'égalité étant atteinte uniquement en cas de coïncidence totale des deux traces.

Enfin, considérons le cas où la trace de γ n'est pas entièrement contenue dans W . Puisque γ et $Fr(W)$ sont connexes, la trace de la première intersecte la seconde. Soit $\bar{s}$ le premier point de $[s_0; s_1]$ tel que $\alpha(\bar{s}) \in Fr(W)$. D'après le raisonnement précédent, la longueur d'arc de la restriction de α à $[s_0; \bar{s}]$ est supérieure ou égale à celle de la géodésique radiale reliant p à $\alpha(\bar{s})$, que l'on peut noter d . Dès lors, la longueur d'arc totale de α est également supérieure ou égale à d . Puisque q est dans l'intérieur de w , la longueur de la géodésique le reliant à p est strictement inférieure à d . Finalement, il s'en suit bien que $l(\alpha)$ est strictement supérieure à $l(\gamma)$. Dans ce cas, l'égalité n'est jamais vérifiée et les traces des deux courbes considérées ne peuvent pas être égales.

Dans tous les cas, l'inégalité est vérifiée et l'égalité ne tient que si les traces des deux courbes sont identiques. $\square$

Nous pouvons finalement montrer le théorème suivant, qui garantit la surjectivité de l'application exponentielle dans le cas des surfaces connexes et complètes. Il s'agit pour cela de construire une géodésique entre deux points quelconques de S .

Théorème 3.1 (Hopf-Rinow). *Soit S une surface régulière complète et connexe et soient p et q deux points de S . Il existe une géodésique γ joignant p et q telle que $l(\gamma) = \text{dist}(p, q)$.*

Une telle géodésique est dite minimale.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}(0, \eta)$ un disque de $T_p S$ sur lequel $\exp_p$ est un difféomorphisme. Notons A la frontière de $\exp_p(\mathcal{B}(0, \eta))$. Puisque $\exp_p$ est continue, A est aussi l'image de la frontière de $\mathcal{B}(0, \eta)$, compacte. Toujours par continuité de $\exp_p$, A est compacte elle aussi.

La fonction $m \mapsto \text{dist}(m, q)$ y atteint donc son minimum, que nous noterons m . Ce point appartenant à l'ensemble sur lequel $\exp_p$ est surjective, il peut s'écrire comme $\exp_p(\eta v)$, avec $v \in T_p S$ tel que $\|v\| = 1$. Posons $\gamma : s \mapsto \exp_p(sv)$. Puisque S est complète, γ est définie sur tout $\mathbb{R}$. La normalisation de v permet d'assurer à γ d'être paramétrée par la longueur d'arc. Par définition d'une géodésique, la norme de son vecteur tangent ne varie pas et reste donc dans notre cas constante en 1.

Soit $r := \text{dist}(p, q)$. Si l'on parvient à montrer que $\gamma(r) = q$, alors il apparaîtra que γ est la géodésique minimale recherchée.

Pour cela, considérons l'ensemble $B = \{s \in [0; r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s\}$. Il suffit de montrer que r appartient à B puisqu'alors on aura $\text{dist}(\gamma(r), q) = 0$ ce qui, d'après ce qui précède, voudra exactement dire que $\gamma(r)$ et q sont confondus. Nous allons montrer que B est exactement $[0; r]$ en nous servant de la connexité de ce dernier. Tout d'abord, voyons que B n'est pas vide. Considérons à nouveau le point η . Etant donné que toutes les courbes reliant p à q doivent couper A , il se trouve que

$$\text{dist}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} l(\gamma) = \inf_{x \in A} \left(\inf_{\gamma \in \Gamma_{p,x}} l(\gamma) + \inf_{\gamma \in \Gamma_{q,x}} l(\gamma) \right).$$

Cela revient à dire que

$$\text{dist}(p, q) = \inf_{x \in A} (\text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q)) = \inf_{x \in A} (\eta + \text{dist}(x, q)) = \eta + \inf_{x \in A} \text{dist}(x, q) = \eta + \text{dist}(m, q),$$

ce qui prouve que $\eta \in B$.

Ensuite, montrons que B est ouvert dans $[0; r]$. Soit s_0 un point de B . Construisons $\bar{\eta}$ et $\bar{m}$ comme nous l'avons fait pour η et m avec $\gamma(s_0)$ en lieu et place de p . Comme précédemment, $\text{dist}(p, q) = \bar{\eta} + \text{dist}(\bar{m}, q)$. Il reste donc à montrer que la courbe $\bar{\gamma}$ suivant γ jusqu'à m puis la géodésique radiale jusqu'à $\bar{m}$ coïncide en fait sur toute sa longueur avec γ . Pour cela, il suffit de montrer que cette courbe est une géodésique : par unicité de la géodésique partant d'un certain point avec une certaine direction, on pourra en conclure l'égalité des courbes. Or, il se trouve que $l(\bar{\gamma}) = s_0 + \bar{\eta}$. D'un autre côté, par inégalité triangulaire puis par hypothèse sur s_0 ,

$$\text{dist}(p, \bar{m}) \geq \text{dist}(p, q) - \text{dist}(\bar{m}, q) = r - s_0 - \bar{\eta}.$$

Il s'en suit que $\bar{\gamma}$ est une courbe minimisant la distance entre p et $\bar{m}$. D'après la Proposition ??, $\bar{\gamma}$ est bien une géodésique. Ainsi, $s_0 + \delta \in B$, pour tout $\delta \leq \bar{\eta}$.

L'ensemble B est clairement fermé et ce fait, ajouté aux deux précédents, implique par connexité de $[0; r]$ que $B = [0; r]$.

On a donc trouvé une géodésique entre p et q dont la longueur d'arc atteint $\text{dist}(p, q)$. $\square$

3.6 Champs de Jacobi

Nous avons déjà vu que $\exp_p$ est un difféomorphisme sur un voisinage de 0. Dans certains cas, on peut en fait prouver bien mieux, à savoir qu'il s'agit d'un difféomorphisme au voisinage de chacun de les points de $T_p S$.

Pour arriver à cela, il est commode d'introduire de nouveaux objets.

Définition 3.5 (Variations d'une courbe, champ de vecteurs variationnel). *Soit S une surface régulière et $\alpha : [0; l] \rightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc.*

Une application différentiable $h : [0; l] \times [0; 1] \rightarrow S$ vérifiant $h(s, 0) = \alpha(s)$ pour tout $s \in [0; l]$ est une variation de α .

Si $h(0, t) = \alpha(0)$ et $h(l, t) = \alpha(l)$ pour tout $t \in (-\epsilon; \epsilon)$, cette variation est dite propre.

Le champ de vecteurs $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)$ est appelé champ de vecteurs variationnel de h .

Commençons par montrer un résultat de calcul qui sera utile par la suite.

Lemme 3.6. *Soit S une surface régulière, $h : (-\epsilon; \epsilon) \times (-\eta; \eta) \rightarrow S$ une variation et V son champ de vecteurs variationnel. Alors*

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = K(s, t) \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge V.$$

Démonstration. Commençons par décomposer $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V$ dans la base $\{X_u, X_v\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V &= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s} \\
&= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} X_v \right) \\
&= \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial s^2} X_u + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{ds} X_u + \frac{\partial^2 h_2}{\partial s^2} X_v + \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{ds} X_v \right) \\
&= \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial s^2} X_u \right) + \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{ds} X_u \right) + \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial s^2} X_v \right) + \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{ds} X_v \right).
\end{aligned}$$

D'après un lemme précédent, les deux termes en X_u se décomposent ainsi :

$$\begin{cases} \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial s^2} X_u \right) = \frac{\partial^3 h_1}{\partial t \partial s^2} X_u + \frac{\partial^2 h_1}{\partial s^2} \frac{D X_u}{dt} \\ \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{ds} X_u \right) = \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial s} \frac{D X_u}{ds} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{D X_u}{ds} \end{cases}$$

En effectuant le même calcul pour $\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial s} X_u \right) = \frac{\partial^3 h_1}{\partial s^2 \partial t \partial s} X_u + \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial s} \frac{D X_u}{ds} \\ \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{dt} X_u \right) = \frac{\partial^2 h_1}{\partial s^2} \frac{D X_u}{dt} + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{ds} \frac{D X_u}{dt} \end{cases}$$

Le lemme de Schwartz permet de simplifier la différence de ces deux expressions, pour laquelle il ne reste alors plus que $\frac{\partial h_1}{\partial s} \left(\frac{D}{dt} \frac{D X_u}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{D X_u}{dt} \right)$.

En procédant de la même manière pour le coefficient de X_v , on trouve finalement que

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = \frac{\partial h_1}{\partial s} \left(\frac{D}{dt} \frac{D X_u}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{D X_u}{dt} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial s} \left(\frac{D}{dt} \frac{D X_v}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{D X_v}{dt} \right).$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_v - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_v$ et $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_u - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_u$. Pour cela, notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\frac{D}{ds} X_u &= \pi \left(\frac{\partial}{\partial s} X_u \right) \\
&= \pi \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} X_{uu} + \frac{\partial h_2}{\partial s} X_{uv} \right) \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial s} \pi(X_{uu}) + \frac{\partial h_2}{\partial s} \pi(X_{uv}) \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{du} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{dv} X_u.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_u &= \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial s} \frac{D}{du} X_u + \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{D}{du} X_u + \frac{\partial^2 h_2}{\partial t \partial s} \frac{D}{dv} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{D}{dv} X_u \\
&= \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial s} \frac{D}{du} X_u + \frac{\partial h_1}{\partial s} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{du} \frac{D}{du} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{dv} \frac{D}{du} X_u \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 h_2}{\partial t \partial s} \frac{D}{dv} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{D}{du} \frac{D}{dv} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{D}{dv} \frac{D}{dv} X_u \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en effectuant le même calcul pour $\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_u$, on obtient

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_u - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_u = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} X_u - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} X_u \right).$$

Voyons maintenant comment calculer $\frac{D}{dv} \frac{D}{du} X_u - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} X_u$. D'après les calculs effectués à la section précédente, $\frac{D}{du} X_u = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{D}{dv} \frac{D}{du} X_u &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 \frac{D}{dv} X_u + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 \frac{D}{dv} X_v \\ &= ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) X_u + ((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2) X_v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_u - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_u &= ((\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) X_u \\ &\quad + ((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2) X_v. \end{aligned}$$

On reconnaît dans les coefficients devant X_u et X_v les expressions concernées par le Lemme ??, ce qui nous donne l'égalité de la précédente expression avec $-FKX_u + EX_v$, elle-même égale à $K(\langle X_u, X_u \rangle X_v - \langle X_u, X_v \rangle X_u)$, qui n'est autre que $K(X_u \wedge X_v) \wedge X_u$.

De la même manière, on peut prouver l'égalité $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_v - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_v = K(X_u \wedge X_v) \wedge X_v$.

Pour achever la preuve du lemme, il suffit désormais de remarquer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} X_v \right) \wedge \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial t} X_v \right) \\ &= \Delta(X_u \wedge X_v), \end{aligned}$$

avec $\Delta := \frac{\partial h_1}{\partial s} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s} \frac{\partial h_1}{\partial t}$.

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V &= \frac{\partial h_1}{\partial s} \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_u - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_u \right) + \frac{\partial h_2}{\partial s} \left(\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X_v - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X_v \right) \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s} \Delta K(X_u \wedge X_v) \wedge X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} \Delta K(X_u \wedge X_v) \wedge X_v \\ &= K(\Delta X_u \wedge X_v) \wedge \left(\frac{\partial h_1}{\partial s} X_u + \frac{\partial h_2}{\partial s} X_v \right) \\ &= K\left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge V. \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, nous allons avoir besoin d'objets un peu plus particuliers que les champs variationnels. Plus précisément, nous allons nous intéresser aux variations de géodésiques qui préservent leurs propriétés.

Définition 3.6 (Champ de Jacobi). *Soit S une surface régulière, γ une géodésique et $h : [0; l] \times (-\epsilon; \epsilon) \rightarrow S$ une variation de γ telle que pour tout $t \in (-\epsilon; \epsilon)$, $h_t : s \mapsto h(s, t)$ soit une géodésique.*

Le champ de vecteurs variationnel de h , noté J , est un champ de Jacobi le long de γ .

Soient γ et h comme dans la définition. Puisqu'en tout t h_t est une géodésique, $\frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s}(s, t)$ est nul, d'où $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial s}(s, t)$ l'est aussi. Or, d'après le Lemme ??, cette expression est égale à

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) + K(s, t) \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} \right) \wedge \frac{\partial h}{\partial s}(s, t).$$

Le premier terme de cette somme vaut, d'après le Lemme ??, $\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)$.

Ainsi, quand $t = 0$, l'égalité se réécrit

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s) + K(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0$$

et est appelée *égalité de Jacobi*.

Les champs de Jacobi permettent d'observer ce qu'il advient de deux géodésiques partant d'un même point p quand leurs directions sont infinitésimalement proches. De telles considérations sont précieuses pour déterminer s'il est possible de trouver un voisinage de p sur lequel les géodésiques ne se croisent pas, autrement dit sur lequel $\exp_p$ est injective.

Définition 3.7 (Points conjugués). *Soit p un point de S et $\gamma : [0; l] \rightarrow S$ une géodésique telle que $\gamma(0) = p$. Soit $s_0 \in [0; l]$. On dit que $p_0 = \gamma(s_0)$ est conjugué à p s'il existe un champ de Jacobi J non nul le long de γ tel que $J(s_0) = J(0) = 0$.*

Certaines conditions sur la courbure garantissent l'absence de points conjugués, et donc l'existence d'un voisinage d'injectivité de $\exp_p$:

Théorème 3.2. *Il n'existe pas de points conjugués sur une surface régulière de courbure gaussienne négative ou nulle.*

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soit J un champ de Jacobi le long de γ tel que*

$$\langle J(s_1), \gamma'(s_1) \rangle = \langle J(s_2), \gamma'(s_2) \rangle = 0,$$

pour s_1 et s_2 deux points distincts de $[0; l]$.

Alors $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ pour tout S de $[s_1; s_2]$.

Démonstration. D'après les lemmes précédents et parce que γ est une géodésique,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \langle J(s), \gamma'(s) \rangle &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma' \rangle + \langle J, \frac{D\gamma'}{ds} \rangle \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma' \rangle - \langle J, \frac{D\gamma'}{ds} \rangle \right) \\ &= \langle \frac{D^2J}{ds^2}, \gamma' \rangle + \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{D\gamma'}{ds} \rangle - \langle \frac{D^2\gamma'}{ds^2}, J \rangle - \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{D\gamma'}{ds} \rangle. \end{aligned}$$

Puis, parce que J vérifie l'égalité de Jacobi et que γ est toujours une géodésique, ceci vaut $\langle -K(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma', \gamma' \rangle$ et est donc nul. Ainsi, $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle$ est de la forme $as + b$. Une telle application, à moins d'être nulle, ne vaut 0 qu'en un seul point de $\mathbb{R}$. Puisque par hypothèse elle s'annule en deux points distincts, elle est identiquement nulle. $\square$

Démonstration. Soit $p \in S$ et γ une géodésique définie sur $[0; l]$ partant de $\gamma(0) = p$. Raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un champ de Jacobi J le long de γ tel que $J(0) = J(s) = 0$. Alors $\langle J(0), \gamma'(0) \rangle = \langle J(l), \gamma'(l) \rangle = 0$ et donc, par le lemme précédent, $\langle J, \gamma' \rangle \equiv 0$. Dans ce cas, l'équation de Jacobi devient $\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s) = -KJ$.

D'un autre côté, $\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle = 2 \langle \frac{DJ}{ds}, J \rangle$ est elle aussi identiquement nulle. En effet, en différentiant une nouvelle fois le membre de droite en fonction de S , on trouve

$$\langle \frac{D^2J}{ds^2}, J \rangle + \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle = -K \langle J, J \rangle + \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle,$$

toujours positif si la courbure gaussienne est négative ou nulle le long de γ .

Ainsi, $\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle$ est croissante sur $[0; l]$. Puisqu'elle est nulle en 0 et en l , elle est nulle sur tout l'intervalle.

Exactement pour les mêmes raisons, $\langle J, J \rangle$ est identiquement nulle. Il n'existe donc pas de champ de Jacobi non nul satisfaisant les conditions de la définition, ce qui signifie que le point p ne possède aucun point conjugué. $\square$

Nous voudrions maintenant construire explicitement des champs de Jacobi. C'est ce que va nous permettre le lemme suivant :

Lemme 3.8. *Soit p un point d'une surface régulière S et soient v et w deux vecteurs de $T_p S$.*

Notons $\gamma : [0; l] \rightarrow S$ la géodésique donnée par $s \mapsto \exp_p(sv)$. Le champ de vecteurs $J : s \mapsto s(d\exp_p)_{sv}(w)$ est un champ de Jacobi le long de γ tel que $J(0) = 0$ et $\frac{D}{ds}J(0) = w$.

Démonstration. Avant toute chose, remarquons que l'on peut, dans la mesure où $T_p S$ est un plan, considérer $T_v(T_p S)$ comme la translation de $T_p S$ par le vecteur v et donc identifier ces deux plans.

Il s'agit de construire une variation h telle que h_t soit une géodésique pour tout t . Pour cela, considérons une courbe $\beta : (-\epsilon; \epsilon) \rightarrow T_p S$ telle que $\beta(0) = v$ et $\beta'(0) = w$ et posons

$$h : \begin{cases} [0; l] \times (-\epsilon; \epsilon) & \rightarrow S \\ (s, t) & \mapsto \exp_p(s\beta(t)). \end{cases}$$

Il est clair que h est différentiable, que les h_t sont bien tous des géodésiques et que $h_0 = \gamma$. Voyons que son champ de vecteurs variationnel est bien celui désiré et calculons sa dérivée covariante :

$$J(s) = \frac{d}{dt}h(s, 0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp_p(s\beta(t)) = d_{sv}\exp_p(sw) = sd_{sv}\exp_p(w),$$

d'où

$$\frac{D}{ds}J(s) = \frac{D}{ds}(sd_{sv}\exp_p(w)) = d_{sv}\exp_p(w) + s\frac{D}{ds}d_{sv}\exp_p(w).$$

D'après une remarque précédente, $\frac{D}{ds}J(0) = w$, tandis qu'il est évident que $J(0) = 0$. Le champ de vecteurs J est donc bien un champ de Jacobi. $\square$

Nous voici maintenant en mesure de prouver que sur une surface régulière sans points conjugués, $\exp_p$ est un difféomorphisme local. Nous nous servirons pour cela du théorème d'inversion locale et de la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soient p et q deux points d'une surface régulière S et $\gamma : [0; l] \rightarrow S$ une géodésique reliant ces deux points.*

Le point q est conjugué à p si et seulement si $l\gamma'(0)$ est un point critique de $\exp_p$.

Démonstration. Soit $v \in T_p S$ un point critique de $\exp_p$. Alors il existe $w \in T_v(T_p S)$ tel que $d_v\exp_p(w) = 0$. En appliquant le lemme précédent à $\frac{1}{l}v$ et w , on trouve un champ de Jacobi J tel que $J(0) = 0$, $J(l) = ld_v\exp_p(w) = 0$. Ce champ de vecteurs est bien non identiquement nul puisque par construction $\frac{D}{ds}J(0) = w \neq 0$, ce qui montre que p et q sont conjugués.

Réciproquement, soient p et q deux points conjugués relativement à une géodésique γ et soit J le champ de Jacobi tel que $J(0) = J(l) = 0$. Posons $v = \gamma'(0)$ et $w = \frac{DJ}{ds}(0)$ et contruisons $\bar{J}$ comme dans le lemme précédent. Les deux champs de vecteurs J et $\bar{J}$ satisfont tous deux l'équation de Jacobi qui, assortie aux mêmes conditions initiales, constitue un problème de Cauchy. La solution d'un tel problème est unique, ce qui implique ici que $J = \bar{J}$ et donc que $J(l) = ld_{lv}\exp_p(w) = 0$. Il s'en suit que $d_{lv}\exp_p(w) = 0$ et donc que lv est un point critique de $\exp_p$. $\square$

Corollaire 3.1. *Soit S une surface régulière de courbure gaussienne négative ou nulle. Soit p un point de S .*

L'application exponentielle en p est un difféomorphisme local.

Démonstration. D'après les propositions précédentes, si K est toujours négative, p n'a pas de points conjugués et donc $\exp_p$ pas de points critiques. Le théorème d'inversion locale implique alors que $\exp_p$ est un difféomorphisme local. $\square$

Définition 3.8 (Voisinage normal). *Soit S une surface régulière. On appelle voisinage normal de $p \in S$ l'image d'un voisinage de 0 dans $T_p S$ sur lequel $\exp_p$ est un difféomorphisme.*

4 D'homéomorphisme local à homéomorphisme : les revêtements

Les principaux résultats que nous avons pu prouver jusqu'à présent, à l'exception du théorème de Hopf-Rinow, sont locaux. Pour étendre à toute la surface des propriétés que l'on ne sait être vraies que dans de petits voisinages, il nous faudra passer par de nouvelles considérations topologiques.

4.1 Relèvements d'arcs

On voudrait notamment pouvoir montrer que certaines applications, l'application de Gauss ou l'application exponentielle par exemple, sont des homéomorphismes sur tout leur domaine de définition. Pour cela, il faut trouver des conditions sous lesquelles un homéomorphisme local est un homéomorphisme.

Oublions donc un moment les surfaces régulières et considérons des espaces topologiques quelconques.

Définition 4.1 (Arc). *Soit A un espace topologique. Un arc est une courbe continue d'un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ dans A .*

Définition 4.2 (Propriété de relever les arcs). *Soient E et B deux espaces topologiques. Une application $\pi : E \rightarrow B$ a la propriété de relever les arcs si pour tout arc $\alpha : [0; l] \rightarrow B$ et tout point $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ il existe un unique arc $\bar{\alpha} : [0; l] \rightarrow E$ dont l'image par π est α et tel que $\bar{\alpha}(0) = p$.*

On dit alors que $\bar{\alpha}$ est le relèvement de α par π d'origine p .

Supposons maintenant que l'on "déforme" continuellement un arc tracé sur B . Peut-on encore déformer le relèvement de l'arc d'origine pour obtenir celui de l'arc transformé ? Avant de répondre à cette question, il est nécessaire de définir ce que l'on entend par "déformation" d'un arc.

Définition 4.3 (Homotopie). *Soit un espace topologique B et soient $\alpha_1, \alpha_2 : [0; l] \rightarrow B$ deux arcs joignant deux points p et q de B .*

On dit que α_1 et α_2 sont homotopiques s'il existe une application continue $H : [0; l] \times [0; 1] \rightarrow B$ telle que : $H(s, 0) = \alpha_1(s)$, $H(s, 1) = \alpha_2(s)$, $H(0, t) = p$ et $H(l, t) = q$ pour tout $s \in [0; l]$ et tout $t \in [0; 1]$.

L'application H est alors appelée une homotopie.

Définition 4.4 (Ensemble simplement connexe). *Un espace topologique B est dit simplement connexe si pour toute paire d'arcs (α_1, α_2) il existe une homotopie transformant α_1 en α_2 .*

Intuitivement, les ensembles simplement connexes n'ont pas de "trous". Le cylindre n'est par exemple pas simplement connexe : un arc qui en fait le tour ne peut pas être transformé en un point par une déformation continue.

Proposition 4.1. *Soient E et B des espaces topologiques et $\pi : E \rightarrow B$ un homéomorphisme local ayant la propriété de relever les arcs.*

Si deux arcs de B sont homotopes, alors leurs relèvements respectifs, pourvu qu'ils aient la même origine, sont aussi homotopes.

Démonstration. Soient $p, q \in B$ et $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$. Soient α_1 et α_2 deux arcs reliés par une homotopie $H : [0; l] \times [0; 1] \rightarrow B$. Notons $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ les relèvements respectifs de α_1 et α_2 d'origine $\bar{p}$.

Il suffit de montrer qu'il existe un unique relèvement de H dans E transformant $\bar{\alpha}_1$ en $\bar{\alpha}_2$, autrement dit une unique homotopie $\bar{H} : [0; l] \times [0; 1] \rightarrow E$ d'origine $\bar{p}$ telle que pour tout $t \in [0; 1]$, $\pi(\bar{H}(s, t)) = H(s, t)$. Tout d'abord, montrons que si deux applications $\bar{H}_1$ et $\bar{H}_2$ ont ces propriétés, alors elles sont égales.

Considérons l'ensemble

$$A := \{(s, t) \in [0; l] \times [0; 1] \mid \bar{H}_1(s, t) = \bar{H}_2(s, t)\}.$$

C'est un ensemble non-vidé puisqu'il contient au moins $\bar{p}$. Par continuité de $\bar{H}_1$ et $\bar{H}_2$, A est fermé. Il ne reste plus qu'à montrer que A est aussi ouvert dans $[0; l] \times [0; 1]$ pour pouvoir conclure, par connexité de $[0; l] \times [0; 1]$, que $A = [0; l] \times [0; 1]$.

Soit $(s, t) \in A$. Par hypothèse sur π , il existe un voisinage V de $\bar{p}$ sur lequel π est un homéomorphisme. Comme $\bar{H}_1$ et $\bar{H}_2$ sont continues, il existe un voisinage U de (s, t) dans $[0; l] \times [0; 1]$ tel que $\bar{H}_1(U), \bar{H}_2(U) \in V$. Or, sur U $\pi \circ \bar{H}_1 = \pi \circ \bar{H}_2$. Mais puisque π y est bijective, cela implique que $\bar{H}_1 = \bar{H}_2$ sur ce même ensemble. L'ensemble A est donc bien ouvert dans $[0; l] \times [0; 1]$, ce qui permet de conclure que $A = [0; l] \times [0; 1]$ et donc que $\bar{H}_1 = \bar{H}_2$.

Il ne reste plus qu'à trouver une application $\bar{H}$ satisfaisant les conditions de la proposition pour achever la preuve. Fixons $\bar{H}$ l'application qui à $(s, t) \in [0; l] \times [0; 1]$ associe $\bar{\alpha}_t(s)$, où $\bar{\alpha}_t$ est le relèvement de $\alpha_t := H(\cdot, t)$ d'origine $\bar{p}$. Par construction, $\pi(\bar{H}(s, t)) = H(s, t)$ pour tout $t \in [0; 1]$, $\bar{H}(s, 0) = \bar{\alpha}_1$ et $\bar{H}(s, 1) = \bar{\alpha}_2$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\bar{H}$ est continue.

Soit donc $(s_0, t_0) \in [0; l] \times [0; 1]$ et V un voisinage de $\bar{H}(s_0, t_0)$ sur lequel π est un homéomorphisme. Quitte à restreindre V , on peut supposer que $Q := \pi(V) = (s_0 - \epsilon; s_0 + \epsilon) \times (t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$. On voudrait pouvoir écrire que $\bar{H} = \pi^{-1} \circ H$ sur Q .

Il se trouve que $\pi^{-1} \circ H(s_0, \cdot)$ est un relèvement de $H(s_0, \cdot)$ passant par $\bar{H}(s_0, t_0)$. Par unicité du relèvement, $\pi^{-1} \circ H(s_0, \cdot) = \bar{H}(s_0, \cdot)$. Soit $t_1 \in (t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon)$. L'étape précédente nous permet d'affirmer que $\pi^{-1} \circ H(s_0, t_1) = \bar{H}(s_0, t_1)$ et donc que $\bar{H}(s, t_1)$ est le relèvement de l'arc $H(s, t_1)$ passant par $\bar{H}(s_0, t_1)$. Comme précédemment, cela montre que $\pi^{-1} \circ H(\cdot, t_1) = \bar{H}(\cdot, t_1)$ et donc que $\pi^{-1} \circ H(s_1, t_1) = \bar{H}(s_1, t_1)$ pour tout $s_1 \in (s_0 - \epsilon; s_0 + \epsilon)$. De fait, $\pi^{-1} \circ H = \bar{H}$ sur tout Q . Il s'en suit que $\bar{H}$ est continue, en tant que composée de telles applications, et fournit donc le relèvement souhaité. Ainsi, $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ sont bien homotopes. $\square$

Nous avons maintenant à notre disposition tous les outils nécessaires pour énoncer une condition suffisante pour qu'un homéomorphisme local soit un homéomorphisme global.

Proposition 4.2. *Soient E un ensemble connexe par arcs et B un ensemble simplement connexe.*

Un homéomorphisme local $\pi : E \rightarrow B$ ayant la propriété de relever les arcs est un homéomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que, sous les hypothèses de la proposition, π est injective.

Considérons pour cela deux points p et q de E . Par hypothèse de connexité sur E , il existe un arc α joignant p à q . Si $\pi(p) = \pi(q)$, l'image de la trace de α par π , $\bar{\alpha}$ est une courbe fermée. L'ensemble B étant simplement connexe, $\bar{\alpha}$ est homotope à l'arc constant en $\pi(p)$. Le relèvement de ce dernier par π est donc constant en p . D'un autre côté, l'arc α est un relèvement de $\bar{\alpha}$ d'origine p . D'après la Proposition ??, il est homotope à l'arc constant en p . Son point de départ et son point d'arrivée sont donc tous deux p , ce qui implique que $p = q$. $\square$

4.2 Revêtements

On a vu que la propriété de relever les arcs est suffisante pour qu'un homéomorphisme local de source simplement connexe et de but connexe soit un homéomorphisme global. Cette propriété est toutefois assez fastidieuse à montrer en pratique. Dans certain cas, il sera plus aisé d'utiliser une condition sur π plus forte mais plus simple à vérifier.

Définition 4.5. *Soient E et B deux espaces topologiques.*

Une application $\pi : E \rightarrow B$ est un revêtement s'il existe un voisinage V_b de tout $b \in B$ dont l'image réciproque par π est union disjointe d'ouverts de E , tels que la restriction de π à chacun de ces ouverts est un homéomorphisme sur V_b .

Remarquons qu'un revêtement est par définition surjectif. De plus :

Proposition 4.3. *Un revêtement a la propriété de relever les arcs.*

Démonstration. Soient E et B deux espaces topologiques et $\pi : E \rightarrow B$ un revêtement. Considérons un arc de B , que l'on désignera par α , et un point de E , que l'on notera p_0 . On montre par un raisonnement exactement identique à celui de la proposition ?? que s'il existe deux relèvements de α , alors ils sont identiques. Il ne reste donc plus qu'à montrer l'existence d'un tel relèvement. Supposons que α soit définie sur $[0; l]$. Par hypothèse sur π , il existe pour tout t de cet intervalle un voisinage ouvert V_t de $\alpha(t)$ tel que $\pi^{-1}(V_t)$ est union finie d'ouverts disjoints sur chacun desquels π est un homéomorphisme. Par continuité de α , il existe alors un sous-intervalle ouvert de t , notons-le I_t , dont l'image par α est incluse dans V_t .

Par compacité de $[0; l]$, il existe un nombre fini de t tels que $[0; l] = \cup_{i=1}^n I_{t_i}$. Soit I_0 l'un de ses intervalles contenant 0. Par construction de I_0 et par hypothèse sur π , il existe un ouvert U_0 de E contenant p_0 sur lequel π^{-1} est bien définie, continue et bijective. Alors $\bar{\alpha} := \pi^{-1} \circ \alpha$ est bien définie sur I_0 , est continue et vaut p_0 en 0. Nous venons donc de trouver un relèvement de α sur I_0 . Reste à voir comment on peut l'étendre sur tout $[0; l]$.

Il suffit pour cela de remarquer que, puisque tous les I_{t_i} sont ouverts et qu'il y en a un nombre fini, alors il en existe un, que l'on appellera I_1 , dont l'intersection avec I_0 est non-vide. Il s'agit à présent de choisir un t_1 dans cette intersection et de lui appliquer exactement le même raisonnement qu'à 0, en prenant $\bar{\alpha}(t_1)$ au lieu de p_0 . La bijectivité de π sur V_0 assure que $\bar{\alpha}(I_1)$ et $\bar{\alpha}(I_0)$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. Par connexité de $[0; l]$, il est possible de définir de cette façon $\bar{\alpha}$ sur tout l'intervalle. Ainsi, $\bar{\alpha}$ est le relèvement recherché. $\square$

Par conséquent, si l'on arrive à prouver qu'un homéomorphisme local est un revêtement, on peut lui appliquer les résultats de la sous-section précédente. En particulier, si l'espace de départ est connexe par arcs et l'espace d'arrivée simplement connexe, alors l'homéomorphisme est global.

Proposition 4.4. *Soient E et B deux espaces topologiques. Supposons que E soit compact et que B soit connexe. Si $\pi : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme local, alors c'est un revêtement.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que π est surjective. En effet, l'image du compact E par l'application continue π est un compact, et donc un fermé, de B . D'autre part, π étant un homéomorphisme local, $\pi(E)$ est aussi ouvert dans B . Or, $\pi(E)$ ne peut pas être vide par définition d'une application. Il s'en suit, B étant connexe, que l'image de E par π est tout B .

Prenons un point b de B . Il faut que $\pi^{-1}(b)$ soit fini car si ce n'était pas le cas, cet ensemble aurait un point d'accumulation au voisinage duquel π ne pourrait pas être injective. Pour chaque point b_i de $\pi^{-1}(b)$, considérons le voisinage U_i sur lequel π est un homéomorphisme. Parce que ces derniers ne sont qu'en nombre fini, il est possible de les choisir disjoints. En prenant l'intersection de toutes leurs images, que l'on notera V , on est assuré de trouver un voisinage de b dont l'image réciproque par π est constituée d'un nombre fini d'ouverts disjoints sur chacun desquels la restriction de π est un homéomorphisme vers V . $\square$

5 Les théorèmes de Hadamard

5.1 Surfaces difféomorphes à un plan

Nous allons appliquer les résultats de la section précédente à l'application exponentielle. Pour cela, montrons que cette dernière a la propriété de relever les arcs.

Lemme 5.1. *Soit S une surface régulière complète. Alors pour tout $p \in S$ et tout couple $(u, v) \in T_p S^2$,*

- i) (Lemme de Gauss) $\langle u, v \rangle = \langle d_u \exp_p(u), d_u \exp_p(v) \rangle$*
- ii) Si en plus $K \leq 0$, alors $\langle v, v \rangle \leq \langle d_u \exp_p(v), d_u \exp_p(v) \rangle$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $u = 0$, les deux égalités sont trivialement vérifiées. Supposons donc que u n'est pas nul et posons $w = \frac{u}{\|u\|}$, $l = \|u\|$. Soit $\gamma : s \mapsto \exp_p(sw)$ la géodésique partant de p avec direction w restreinte à $[0; l]$. Notons J le champ de Jacobi le long de γ donné par le Lemme ??.

Commençons par prouver le point *i)*. Puisque γ est une géodésique et que J vérifie l'équation de Jacobi,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \langle \gamma'(s), J(s) \rangle &= \frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \frac{D}{ds} J(s) \rangle = \langle \gamma'(s), \frac{D^2}{ds^2} J(s) \rangle \\ &= \langle \gamma'(s), K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Alors $\langle \gamma'(s), J(s) \rangle$ est de la forme $sa + b$, avec a et b des constantes réelles. Nous avons $\langle \gamma'(0), J(0) \rangle = \langle \gamma'(0), 0 \rangle = 0$ par construction de J et donc $b = 0$.

Toujours par construction de J et de γ , $\langle \gamma'(l), J(l) \rangle = \langle d_u \exp_p(w), d_u \exp_p(v) \rangle$.

En regroupant toutes ces égalités, on obtient bien

$$\begin{aligned} \langle d_u \exp_p(u), d_u \exp_p(v) \rangle &= \langle d_u \exp_p(w), d_u \exp_p(v) \rangle = la = l \langle \gamma'(0), \frac{D}{ds} J(0) \rangle \\ &= l \langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Ce premier résultat nous permet de réduire la preuve du point *ii)* au cas où $\langle u, v \rangle = 0$. En effet, pour u et $v = \lambda u + \mu u^\perp$ quelconques,

$$\begin{aligned} \langle d_u \exp_p(v), d_u \exp_p(v) \rangle &= \lambda \langle d_u \exp_p(u), d_u \exp_p(v) \rangle + \langle d_u \exp_p(\mu u^\perp), d_u \exp_p(v) \rangle \\ &= \lambda \langle u, v \rangle + \langle d_u \exp_p(\mu u^\perp), d_u \exp_p(v) \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver le lemme pour $\mu u^\perp$.

D'après l'équation de Jacobi et par hypothèse sur K ,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle J, \frac{DJ}{ds} \rangle = \left\| \frac{DJ}{ds} \right\|^2 - K \|J\|^2 \geq 0 \\ \langle J(0), \frac{DJ}{ds}(0) \rangle = 0, \end{cases}$$

d'où $\langle J, \frac{DJ}{ds} \rangle$ est positive. Alors,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle = 2 \langle \frac{D^2 J}{ds^2}, \frac{DJ}{ds} \rangle = -2K \langle J, \frac{DJ}{ds} \rangle \geq 0 \\ \langle \frac{DJ}{ds}(0), \frac{DJ}{ds}(0) \rangle = \|v\|^2, \end{cases}$$

et donc $\frac{d}{ds} \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle \geq \|v\|^2$. Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \langle J(s), J(s) \rangle &= 2 \frac{d}{ds} \langle J(s), \frac{DJ}{ds}(s) \rangle \\ &= 2 \langle \frac{DJ}{ds}(s), \frac{DJ}{ds}(s) \rangle + \langle \frac{D^2 J}{ds^2}(s), J(s) \rangle \\ &= 2(\left\| \frac{DJ}{ds} \right\|^2 - K \|J\|^2) \geq 2 \left\| \frac{DJ}{ds} \right\|^2 \geq 2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

En intégrant deux fois entre 0 et l , puisque $\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle (0) = \langle J, J \rangle (0) = 0$, on trouve que $\langle J(s), J(s) \rangle \geq s^2 \|v\|^2$. En particulier pour $s = l$,

$$\langle ld_u \exp_p(v), ld_u \exp_p(v) \rangle = \langle J(l), J(l) \rangle \geq l^2 \|v\|^2,$$

ce qui équivaut à l'inégalité voulue. $\square$

Proposition 5.1. *Soit S une surface régulière complète de courbure gaussienne partout négative ou nulle et p un point de S .*

L'application exponentielle en p a la propriété de relever les arcs.

Démonstration. Soit $\alpha : [0; l] \rightarrow S$ un arc et v un élément de l'image réciproque de $\alpha(0)$ par $\exp_p$ (il existe car S est complète). On sait déjà que si K est négative ou nulle sur toute la surface, $\exp_p$ est un difféomorphisme local. Par conséquent, il existe un voisinage U de $\alpha(0)$ sur lequel $\exp_p$ est inversible et donc un voisinage de 0 dans $[0; l]$ sur lequel un relèvement $\bar{\alpha}$ de α passant par v est bien défini et unique.

Notons A le sous-ensemble de $[0; l]$ sur lequel $\bar{\alpha}$ est bien définie et unique. On vient de voir que cet ensemble est non-vidé et il est presque immédiat qu'il s'agit d'un ouvert de $[0; l]$. En effet, si t_0 est dans A , il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à $\alpha(t_0)$. Sur les voisinages considérés, l'application exponentielle est un difféomorphisme, ce qui garantit la coïncidence des morceaux de courbe ainsi construits, à l'intersection de leurs domaines de définition.

Montrons que A est fermée. Pour cela, considérons une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A , convergente vers un certain t_0 de $[0; l]$. On prétend que $\bar{\alpha}(t_n)$ a un point d'accumulation. Si ce n'était pas le cas, alors la distance entre $\bar{\alpha}(0)$ et $\bar{\alpha}(t_n)$ sur $T_p S$ serait arbitrairement grande. Par le lemme précédent, la distance intrinsèque entre $\alpha(t_0)$ et $\alpha(t_n)$ sur S le serait aussi, ce qui entre en contradiction avec la continuité de α . La suite $(\bar{\alpha}(t_n))$ possède donc bien un point d'accumulation, que l'on note q .

Soit V un voisinage de q sur lequel $\exp_p : V \rightarrow \exp_p(V)$ est un difféomorphisme et N un entier tel que $\bar{\alpha}(t_N) \in V$. Toujours pour les mêmes raisons qu'au début de la preuve, on peut définir $\bar{\alpha}$ sur un intervalle I contenant t_0 et tel que $\alpha(I) \subset \exp_p(V)$. Un tel intervalle existe par continuité de α . Le point t_0 appartient donc à A .

L'ensemble A est un sous-ensemble non-vidé à la fois ouvert et fermé dans un ensemble connexe. On en déduit que $A = [0; l]$, ce qui achève de prouver l'existence et l'unicité de $\bar{\alpha}$.

L'application exponentielle a donc bien la propriété de relever les arcs. $\square$

Théorème 5.1 (Hadamard). *Soit S une surface régulière complète et simplement connexe de courbure gaussienne partout négative ou nulle. L'application exponentielle en un point p quelconque de S est un difféomorphisme.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\exp_p$ est définie sur tout $T_p S$. D'après la Proposition ??, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\exp_p$ est définie sur $\mathcal{B}(0, \epsilon)$. Soit $v \in T_p S$. Puisque S est complète et par le Lemme ??, $\gamma_{p,v}(1) = \gamma_{p, \frac{\epsilon}{\|v\|} v}(\frac{\|v\|}{\epsilon})$ est bien définie.

Nous avons déjà montré, c'est l'objet du Corollaire ??, que $\exp_p$ est un difféomorphisme local et, a fortiori, un homéomorphisme local. D'après la proposition précédente, $\exp_p$ a également la propriété de relever les arcs. La Proposition ?? nous assure donc qu'il s'agit d'un homéomorphisme entre $T_p S$ et son image.

Cette dernière est S toute entière d'après le théorème de Hopf-Rinow.

En tant que difféomorphisme local bijectif, $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ est bien un difféomorphisme. $\square$

On pourrait se demander ce qu'il adviendrait d'une surface qui serait complète et simplement connexe mais dont la courbure gaussienne serait négative ou nulle partout sauf sur un nombre fini d'ouverts, que l'on pourrait choisir aussi petits que l'on veut. Imaginons par exemple un cube dont les bords auraient été lissés, de telle sorte que la surface obtenue soit régulière et que les points de courbure positive soient cantonnés dans des voisinages des quatre coins (cf Figure ??). Il est évident qu'aucune application continue ne parviendra à transformer la surface ainsi obtenue en plan. Au contraire, il est beaucoup plus



FIGURE 1 – Cube lissé

probable qu'elle soit difféomorphe à une sphère. À l'inverse, si l'on en retire ne serait-ce qu'un seul point, la surface sera bien difféomorphe à un plan.

Cet exemple montre qu'il est absolument nécessaire que la condition sur K soit vérifiée sur toute la surface. C'est en cela que ce théorème constitue un résultat global.

5.2 Surfaces difféomorphes à une sphère

Les outils introduits pour montrer le théorème précédent permettent également de prouver un résultat analogue, faisant cette fois intervenir l'application de Gauss.

Théorème 5.2. *Soit S une surface régulière, connexe et compacte, de courbure gaussienne partout strictement positive. L'application de Gauss est un difféomorphisme entre S et S^2 .*

Démonstration. Par définition, la courbure gaussienne de S en un point est le déterminant de la différentielle de l'application de Gauss en ce point. Si elle est, comme on le suppose, toujours différente de 0, alors le théorème d'inversion locale implique que $N : S \rightarrow S^2$ est un difféomorphisme local. En particulier, il s'agit d'un homéomorphisme local. Ensuite, S étant par hypothèse compacte et S^2 étant connexe, la proposition ?? nous assure que N est un revêtement. Notons au passage que l'image de N est bien S^2 toute entière. Alors, d'après la proposition ??, N a la propriété de relever les arcs. Enfin, puisque S^2 est connexe par arcs, la proposition ?? implique que N est un homéomorphisme. Ceci achève de montrer que l'application de Gauss est un difféomorphisme. $\square$

Remarquons qu'aucune étape de la preuve ne nécessite que K soit partout positive. Le signe de K n'intervient qu'au moment de montrer que N est un difféomorphisme local et, pour cela, il est suffisant que K soit simplement non nulle. Puisque la courbure gaussienne est une fonction continue sur S , la condition précédente implique que K ne change pas de signe. À première vue, le théorème précédent devrait pouvoir s'appliquer aux surfaces complètes, connexes et compactes de courbure gaussienne partout strictement négative. En fait, de telles surfaces n'existent pas.

Proposition 5.2. *Une surface régulière compacte possède au moins un point en lequel la courbure gaussienne est strictement positive. Un tel point est dit elliptique.*

Démonstration. La compacité de S donne l'existence d'une boule de $\mathbb{R}^3$ centrée en 0 et contenant S dans son intérieur. Notons r le rayon minimal d'une telle boule. La sphère de même rayon possède au moins un point commun avec S , que l'on notera p .

Les plans tangents aux deux surfaces en p sont confondus. En effet, si ce n'était pas le cas, S ne pourrait pas se trouver d'un seul côté de la sphère. Pour cette même raison, en chaque direction de $T_p S$ la courbure de S doit être supérieure ou égale à celle de la sphère de rayon r . Cette dernière étant partout strictement positive, on en déduit que dN_p est définie positive et donc que p est un point elliptique. $\square$

Remarque 5.1. On peut montrer que, sous les hypothèses du théorème précédent, S se trouve toujours d'un seul côté de chacun de ses plans tangents. A partir de cela, il est possible de préciser le théorème précédent en montrant que S est alors la frontière d'un ensemble convexe et borné de $\mathbb{R}^3$.

Bibliographie

- M. Do Carmo, *Differentiable curves and surfaces*, Prentice Hall, New-Jersey, 1976.
S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2004.

Source des images

FIGURE ?? : Stainless Steel Ice Cube with Tray Set, Gadgetsin, 2011.
URL : [http ://gadgetsin.com/stainless-steel-ice-cube-with-tray-set.htm](http://gadgetsin.com/stainless-steel-ice-cube-with-tray-set.htm)