Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur : Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

**Algèbre linéaire**

**Chapitre V : Applications linéaires**

# Table des matières



Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Rappels sur les applications

Soient $E$ et $E'$ deux ensembles. Une application $f$ de $E$ dans $E'$ fait correspondre à chaque élément $x$ de $E$ un élément $y$, noté $f(x)$, de $E'$.

### 1.1 Exemples si $E$ et $E'$ sont des parties de $\mathbb{R}$

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $f_2 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $f_3 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto x^2$ sont trois applications, différentes !

2. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x)$ et $f_5 : ]-\pi/2, \pi/2[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$ sont deux applications, l'une étant la réciproque de l'autre.

3. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $0$ sinon, est une application, appelée la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

### 1.2 Exemples plus compliqués

1. $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ symétrie ou rotation,
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$,
4. Une application de $E \subset \mathbb{R}^n$ dans $E' \subset \mathbb{R}^n$ peut se représenter par un champ de vecteurs : en chaque point $v$ de $E$, on dessine le vecteur $f(v)$ de $E'$. Par exemple, les champs électriques ou magnétiques,
5. $f : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \mapsto u'$.

### 1.3 Définitions élémentaires

Soient $f : E \to E'$ une application.

(i) si $v \in E$, l'élément $f(v)$ est appelé l'image de $v$ par $f$. Chaque élément de $E$ n'admet qu'une seule image par $f$.

(ii) Si $V \subset E$, on note $f(V)$ l'ensemble des $f(v)$ pour $v \in V$, appelé l'image de $V$ par $f$ :

$$f(V) = \{f(v) \in E' :\ v \in V\}.$$

(iii) si $w \in E'$, un élément $v \in E$ tel que $f(v) = w$ est appelé un antécédent de $w$ pr $f$ ; il n'existe pas toujours d'antécédent et si un tel antécédent existe, il n'est pas forcément unique. On note

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in E :\ f(v) = w\}$$

l'ensemble des antécédents de $w$ par $f$.

(iv) Si $W \subset E'$, on note $f^{-1}(W)$ l'ensemble des antécédents des éléments de $W$, i.e.

$$f^{-1}(W) = \cup_{w \in W} f^{-1}(\{w\}) = \{v \in E :\ f(v) \in W\}.$$

**Définition.** On dit que l'application $f : E \to E'$ est

(i) surjective si chaque élément de $E'$ a au moins un antécédent, i.e. $f(E) = E'$ ou encore

$$\forall y \in E',\ \exists x \in E \quad y = f(x).$$

(ii) injective si chaque élément de $E'$ a au plus un antécédent, i.e.

$$\forall x, y \in E \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

ou encore

$$\forall x, y \in E \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

(iii) bijective si $f$ est surjective et injective, i.e. si chaque élément de $E'$ a exactement un unique antécédent par $f$ ou encore

$$\forall y \in E',\ \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

**Exemples.**

(1) surjective, non injective

(2) injective, non surjective

(3) bijective

## 1.4 Composition de deux applications

Soient $E$, $E'$ et $E''$ trois ensembles, $f$ une application de $E$ dans $E'$ et $g$ une application de $E'$ dans $E''$. On définit l'application $g \circ f : E \to E''$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in E.$$

**1.1 Proposition.**

*(i)* $f, g$ *surjectives* $\Longrightarrow$ $g \circ f$ *surjective.*

*(ii)* $f, g$ *injectives* $\Longrightarrow$ $g \circ f$ *injective.*

*Démonstration.* (i) $f, g$ surjectives. Alors pour tout $z \in E''$, il existe $y \in E'$ tel que $z = g(y)$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi il existe $x \in E$ tel que $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

(ii) $f, g$ injectives. Si $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, i.e. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, on a $f(x_1) = f(x_2)$ et ainsi $x_1 = x_2$.

□

## 1.5 Réciproque d'une application bijective

**1.2 Proposition.** *Soit* $f : E \to E'$ *une application bijective. Il existe une unique application* $g : E' \to E$ *telle que* $g \circ f = \mathrm{id}_E$ *et* $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$*. En fait* $g$ *est l'application de* $E'$ *dans* $E$ *qui associe à tout* $y \in E'$ *l'unique antécédent de* $y$ *par* $f$*. On appelle cette application la réciproque de* $f$ *et on la note* $f^{-1}$*.*

*Démonstration.* • Existence. Soit $y \in E'$. Comme $f$ bijective, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Posons $g(y) := x$. Par définition $g$ est bien une application de $E'$ dans $E$, $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$.

• Unicité. Soit $\tilde{g}$ une autre application vérifiant les mêmes propriétés. On a alors $\tilde{g} \circ f \circ g = \tilde{g} \circ \mathrm{id}_{E'}$ qui est équivalent à $g = \mathrm{id}_E \circ g = \tilde{g}$.

□

**Remarque.** Si $E$ est un ensemble fini avec $\#E = n$, alors il existe une bijection de $E$ dans $E'$ si et seulement si $E'$ est un ensemble fini et $\#E' = n$.

En général, on dit que deux ensembles $E$ et $E'$ ont le même cardinal s'il existe une bijection de $E$ dans $E'$.

**Exemples.**

(1) $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$.

(2) $\#(\mathbb{Z}^2) = \#\mathbb{Z} \implies \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$.

(3) $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{Q}$.

(4) $\#[0,1] = \#\mathbb{R}$.

On dit d'un ensemble de même cardinal que $\mathbb{N}$ qu'il est dénombrable.

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ et $E'$ sont deux $\mathbb{K}$-e.v.

# 2 Applications linéaires : généralités

## 2.1 Définition

**Définition.** On dit qu'une application $f : E \to E'$ est linéaire si

(i) Pour tout $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ ;

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et tout $u \in E$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

**2.1 Proposition.**

*(i) $f$ linéaire implique $f(0_E) = 0_{E'}$*

*(ii) $f$ linéaire si et seulement si*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_n \in E, \quad f(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

*Démonstration.* (i) $f(0_E) = f(u + (-u)) = f(u) + f(-u) = f(u) - f(u) = 0_{E'}$.

(ii) L'implication réciproque est évidente. Pour l'implication directe, il suffit d"opérer une récurrence sur $n$ en remarquant que $f$ linéaire est équivalent à $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in E$.

$\square$

## 2.2 Exemples : symétries et projections

(1) Symétrie $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport la première bissectrice et parallèlement à l'axe des ordonnées, i.e.

$$s((x,y)) = (x, 2x - y)$$

(dessin + explication de la linéarité).

(2) Projection $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par rapport la première bissectrice et parallèlement à l'axe des ordonnées, i.e.

$$p((x,y)) = (x, x)$$

(dessin + explication de la linéarité).

## 2.3 Autres exemples

(1) Rotation $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to R^2$ de centre $(0,0)$ et d'angle $\theta$, i.e.

$$r_\theta((x,y)) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

(dessin + explication de la linéarité).

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f((x,y)) = (x+y, x-y, 2x+y)$ (explication de la linéarité).

(3) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ donnée par $f(P) = P' + 2P$ (explication de la linéarité).

## 2.4 Image et noyau d'une application linéaire

**Définition.** Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E'$. On définit

(i) l'image de $f$ : $\mathrm{Im}(f) = \{f(u) : u \in E\} = f(E) \subset E'$.

(ii) le noyau de $f$ : $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = 0_{E'}\} = f^{-1}(\{0_{E'}\}) \subset E$

**2.2 Proposition.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E'$.*

*(i) L'image* $\mathrm{Im}(f)$ *de $f$ est un s.e.v de $E'$.*

*(ii) Le noyau* $\mathrm{Ker}(f)$ *de $f$ est un s.e.v de $E$.*

*(iii) $f$ surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = E'$.

*(iv) $f$ injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

*Démonstration.* (i) Pour tout $a, b \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $u, v \in E$ tels que $a = f(u)$ et $b = f(v)$. Posons $w = u + v$. Alors par linárité de $f$, $a + b = f(u) + f(v) = f(u+v) = f(w) \in \mathrm{Im}(f)$. De plus pour tout $\lambda \in K$, $\lambda a = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in \mathrm{Im}(f)$.

(ii) Si $u, v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, par linéarité de $f$, $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0E' + 0_{E'} = 0_{E'}$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda 0_{Z'} = 0_{E'}$, i.e. $u + v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda u \in \mathrm{Ker}(f)$.

(iii) C'est la définition de la surjectivité.

(iv) Implication directe. Si $f$ est injective, pour tout $u \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(u) = 0_{E'} = f(0_E)$ implique $u = 0_E$.
Implication réciproque. Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, pour tout $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$, on a par linéarité $f(u - v) = 0_{E'}$, i.e. $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$, i.e. $u - v = 0_E$.

□

**Exemples.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f((x,y)) = (x+y, x-y, 2x+y)$

**2.3 Corollaire.**

*(i) Si $E'$ est de dimension finie, $f$ surjective si et seulement si* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E')$.

*(ii) $f$ injective si et seulement si* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$.

**Exemples.**

(1) Symétrie précédente (détailler).

(2) Projection précédente (détailler).

### 2.5 Suppléments

**2.4 Proposition.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E'$. Si $F$ un s.e.v de $E$, alors*

$$f(F) := \{f(v) : v \in F\}$$

*est un s.e.v de $E'$.*

*Démonstration.* Exercice. $\square$

On note $\mathcal{L}(E, E')$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $E'$.

**2.5 Proposition.** $\mathcal{L}(E, E')$ *est un s.e.v de l'espace vectoriel* $((E')^E, +, \cdot)$ *des applications de $E$ dans $E'$.*

*Démonstration.* Exercice. $\square$

Une application linéaire de $E$ dans $E'$ bijective est appelée un isomorphisme linéaire de $E$ sur $E'$. Sa réciproque $f^{-1}$ est une application linéaire de $E'$ dans $E$.

## 3 Cas $E$ de dimension finie

On suppose que $E$ est de dimension finie. Supposons que $n = \dim E \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de $E$.

**3.1 Proposition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. On a*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}).$$

*En particulier* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension finie.*

*Démonstration.* Pour tout $a \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que $a = f(u)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $E$, $u$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Par linéarité, $a = f(u)$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs de $f(\mathcal{B})$, i.e. $f(\mathcal{B})$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. $\square$

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée le rang de $f$ et noté $\mathrm{rg}(f)$

### 3.1 Matrice associée à une application linéaire

D'après la proposition précédente, on peut supposer pour la suite que $E'$ est de dimension finie. Soit $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ une base de $E'$.

**Définition.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. La matrice associée à $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = (f(u_1)^{\mathcal{B}'}\ f(u_2)^{\mathcal{B}'}\ \cdots\ f(u_n)^{\mathcal{B}'}),$$

i.e. dont les coefficients de la $i$-ème colonne sont donnés par les coordonnées de $f(u_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

**Exemples.**

- $E = E' = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) $s$ symétrie précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) =?$

(2) $p$ projection précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) =?$

(3) $r_\theta$ rotation précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(r_\theta) =?$

- $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $E' = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}'$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + y)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) =?$

- $E = E'$, $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$, $f = \mathrm{id}_E$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

**3.2 Proposition.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $u \in E$. On a*

$$f(u)^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot u^{\mathcal{B}}.$$

*Démonstration.* Exercice. □

**3.3 Proposition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.*

*(i)* $\mathrm{Im}(f) = \{w \in E' : \exists v \in E,\ w^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot v^{\mathcal{B}}\}$.
*En particulier* $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f))$.

*(ii)* $\mathrm{Ker}\,(f) = \{u \in E : \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot u^{\mathcal{B}} = 0\}$.

*Démonstration.* Exercice. □

**Remarque.** Pour déterminer le noyau d'une telle application linéaire, on résoud le système linéaire homogène :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot X = 0.$$

**Exemples.** Pour les exemples précédents, déterminer les images et noyaux.

**3.4 Proposition.** *Soient $E''$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}''$ une base de $E''$, $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, E'')$ et*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f).$$

*En particulier,*

$$\begin{aligned} & f \text{ est bijective} \\ \Longleftrightarrow \quad & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right]^{-1}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Exercice. □

**Exemples.** Reprenons les exemples précédents. Montrer que $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et $p \circ p = p$. Quelles sont les applications parmi les exemples précédents qui sont des isomorphismes linéaires ?

## 3.2 Théorème du rang

**3.5 Théorème.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$*. On a*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

*Démonstration.* Comme $E$ est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimension finie. Il existe deux familles $\mathcal{F}_1 = (u_1, \ldots, u_p)$ et $\mathcal{F}_2 = (v_1, \ldots, v_q)$ de vecteurs de $E$ telles que $\mathcal{F}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $f(\mathcal{F}_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Montrons que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une base de $E$. Soient $u \in E$ et $\nu_1, \ldots, \nu_q \in \mathbb{K}$ les coordonnées de $f(u)$ dans la base $f(\mathcal{F}_2)$ de $\mathrm{Im}(f)$. On a $u - \sum_i \nu_i v_i \in \mathrm{Ker}(f)$, i.e. $u - \sum_i \nu_i v_i$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_1$. On en déduit que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une famille génératrice de $E$. D'autre part, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \nu_1, \ldots, \nu_q \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_i \lambda_i u_i + \sum_i \nu_i v_i = 0$, on a alors, par linéarité de $f$, $\sum_i \nu_i f(v_i) = 0$ qui implique, par liberté de $f(\mathcal{F}_2)$, $\nu_i = 0$ pour tout $i$. Ainsi $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ qui implique, par liberté de $\mathcal{F}_1$, $\lambda_i = 0$ pour tout $i$. Cela signifie que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une famille libre. De plus $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$ et $\#\mathcal{F}_2 = \#f(\mathcal{F}_2)$. Le résultat en découle. □

# 4 Endomorphismes

**Définition.** Une application linéaire de $E$ dans $E$ est appelée un endomorphisme de $E$. Pour simplifier, on note $\mathcal{L}(E, E)$ par $\mathcal{L}(E)$.

Un endomorphisme de $E$ bijective est appelé un automorphisme de $E$.

## 4.1 Cas $E$ de dimension finie

**4.1 Proposition.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$*. Alors*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

*Démonstration.* Découle du théorème du rang. □

**4.2 Proposition.** *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* $E$*,* $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$*. On a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P^{-1}.$$

*Démonstration.* Découle de l'égalité $f = \mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E$ et de la formule de la matrice associée à une composée. □

## 4.2 Symétries et projections

Soient $F$ et $G$ deux s.e.v de $E$ supplémentaires l'un de l'autre, i.e. $E = F \oplus G$. Pour $u \in E$, notons $u_F$ et $u_G$ les uniques éléments de $E$ tels que $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u = u_F + u_G$.

**Définition.**

(i) On appelle symétrie de $E$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$ l'endomorphisme $s$ de $E$ défini par

$$s(u) = u_F - u_G.$$

(ii) On appelle projection de $E$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$ l'endomorphisme $p$ de $E$ défini par

$$p(u) = u_F.$$

**4.3 Proposition.** *Si $s$ et $p$ sont comme ci-dessus, on a*

*(i)* $s$ *est un automorphisme de* $E$ *et* $s^2 = \mathrm{id}_E$.

*(ii)* $\mathrm{Ker}\,(p) = G$, $\mathrm{Im}(p) = F$ *et* $p^2 = p$.

*Démonstration.* Exercice. □

On suppose à nouveau que $E$ est de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_F$ une base de $F$, $\mathcal{B}_G$ une base de $G$ et $k$ et $l$ les dimensions respectives de ces deux s.e.v. Posons $\mathcal{B} := \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$. Comme $E = F \oplus G$, on a $\mathcal{B}$ base de $E$.

**4.4 Propriétés.** *Si $s$ et $p$ sont comme ci-dessus, on a*

*(i)* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}$.

*(ii)* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*Démonstration.* Exercice. □

**Exemples.** Reprendre les exemples de symétrie et projection précédents, déterminer une telle base de $\mathbb{R}^2$.